

MATRIZ RIGIDEZ DEL ELEMENTO DE BARRA DE GEOMETRIA IMPERFECTA TENIENDO EN CUENTA LA INFLUENCIA DEL ESFUERZO AXIL

Martinez Daniel;

Ingeniero Civil Magister en Ingeniería Estructural
Facultad Regional Avellaneda Universidad Tecnológica Nacional
ingcivilmartinez@yahoo.com.ar

Sarpero Carlos Jorge

Ingeniero en Construcciones Civiles Magister en Ingeniería Estructural
Facultad Regional Avellaneda Universidad Tecnológica Nacional.
ingsarpero@yahoo.com.ar

RESUMEN

Los códigos actuales ANSI, AISC, EUROCODE, para el cálculo de estructuras metálicas obligan a tener en cuenta las imperfecciones al momento de evaluar los esfuerzos en estructuras modeladas con elementos de barra. Los programas comerciales introducen la imperfección reemplazando la geometría imperfecta por una poligonal, incrementando el número nudos, incógnitas cinemáticas, y por ende, la memoria requerida del ordenador, introduciendo errores en el análisis, especialmente en las cáscaras. Partiendo de la solución de la ecuación diferencial de segundo orden de la elástica del elemento de barra imperfecto, en este trabajo se desarrolla el cálculo de la matriz rigidez del elemento, teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axil. Finalmente, se implementará esta matriz rigidez en un programa y se compararán resultados de varios ejemplos con los obtenidos mediante otros métodos de tener en cuenta la imperfección (desplazamiento de nudos adicionales , matriz rigidez geométrica) y se sacarán conclusiones

ABSTRACT

The current ANSI, AISC, EUROCODE codes for the calculation of metallic structures require imperfections to be taken into account when evaluating the forces in structures modeled with bar elements. Commercial programs introduce imperfection by replacing imperfect geometry with a polygonal one, increasing the number of nodes, kinematic unknowns, and therefore, the required computer memory, introducing errors in the analysis, especially in shell structures. Starting from the solution of the second order differential equation of the imperfect beam element, in this work, the calculus of the element stiffness matrix is developed, taking into account the influence of the axial force. Finally, this stiffness matrix will be implemented in a program and results from several examples will be compared with those obtained through other methods of taking imperfection into account (displacement of additional nodes, geometric stiffness matrix) and conclusions will be drawn.

Organiza:

1. INTRODUCCION

El primer trabajo sobre el estudio de la estabilidad de las estructuras fue el publicado por Leonhardt Euler en 1744. Las hipótesis sobre las cuales partía el mismo eran todas en las cuales se basa la Resistencia de Materiales

- 1.a Geometría ; una de sus dimensiones predomina sobre las otras dos (elemento de barra) eje del elemento matemáticamente rectilíneo.
- 1.b Vinculación ; biarticulada en los extremos.
- 1.c Desplazamientos y deformaciones : mucho más pequeños que las dimensiones de la estructura.
- 1.d Material : Elástico Lineal, Isótropo y Homogéneo (Ley de Hooke)
- 1.e Cargas : solo cargada axialmente, en la dirección del eje longitudinal del elemento, no existen cargas en la dirección transversal al eje longitudinal del elemento.
- 1.f Análisis del equilibrio : en la configuración deformada del elemento.

De este estudio se obtiene la expresión de la carga crítica de pandeo, o carga crítica de Euler, la cual permite resolver un gran número de problemas, aunque para ciertos tipos de estructuras, (especialmente en las cáscaras) los valores reales de carga crítica son considerablemente inferiores, respondiendo esta reducción a la sensibilidad a las imperfecciones. Los programas comerciales introducen la imperfección reemplazando la geometría imperfecta por una poligonal, incrementando el número nudos, incógnitas cinemáticas, y por ende, la memoria requerida del ordenador, (aunque hoy en día esto ha dejado de ser un serio inconveniente debido a la gran capacidad de memoria de los ordenadores) introduciendo errores en el análisis. En este trabajo se desarrolla el cálculo de la matriz rigidez del elemento teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axial, respetando las hipótesis de la Resistencia de Materiales, arriba descriptas, solo que ahora, se introduce la imperfección del elemento, modelándola con un polinomio cúbico.

2. GEOMETRIA PERFECTA, IMPERFECTA, Y MODELACION DE LA IMPERFECCION DEL ELEMENTO

Geometría Perfecta o de Referencia : resulta de unir los nudos del elemento con una recta que pasará a identificarse como eje x longitudinal Local del elemento, definiendo así la terna ortogonal Local, x, y

Geometría Imperfecta o Curva :La geometría curva será modelada con un polinomio cúbico, respecto de la terna de referencia local x, y

Organiza:

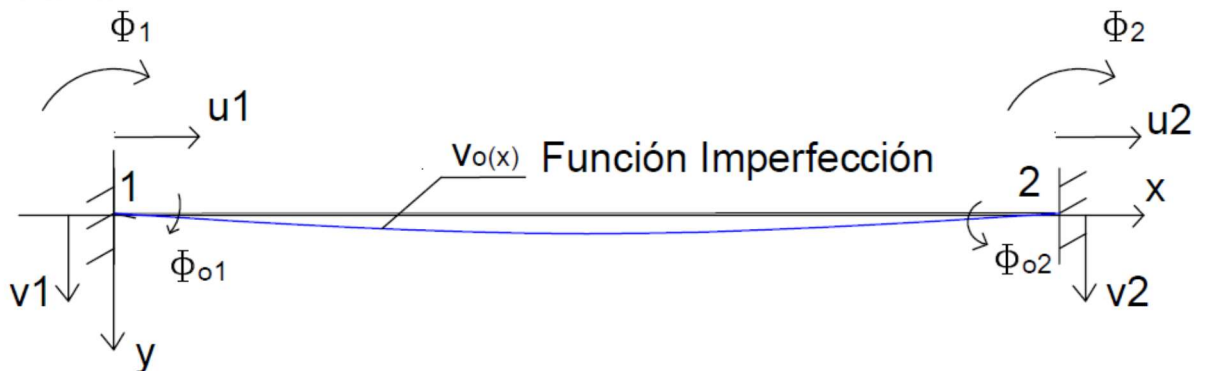


Figura 1

$$v_o(x) = i_3 \cdot x^3 + i_2 \cdot x^2 + i_1 \cdot x$$

$$i_3 = \frac{\phi_{o1} + \phi_{o2}}{L_o^2} \quad i_2 = -\frac{2 \cdot \phi_{o1} + \phi_{o2}}{L_o} \quad i_1 = \phi_{o1}$$

En la figura también se indican las incógnitas cinemáticas y la nomenclatura empleada para identificarlas.

3. PLANTEO Y SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

El cálculo de las expresiones de los elementos de la matriz rigidez se realizará planteando la ecuación diferencial de segundo orden de la línea elástica, teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axial y la imperfección en la geometría del elemento. En la expresión de la curvatura no se tendrá en cuenta la influencia del esfuerzo de corte y a su expresión exacta,

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2} v(x)}{\left[1 + \left(\frac{d}{dx} v(x) \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

se la aproximará, a $\frac{d^2}{dx^2} v(x)$

En la figura 2 se esquematiza el elemento imperfecto luego de que sobre él actúen los desplazamientos nodales $v1, \Phi1, v2, \Phi2$

Organiza:

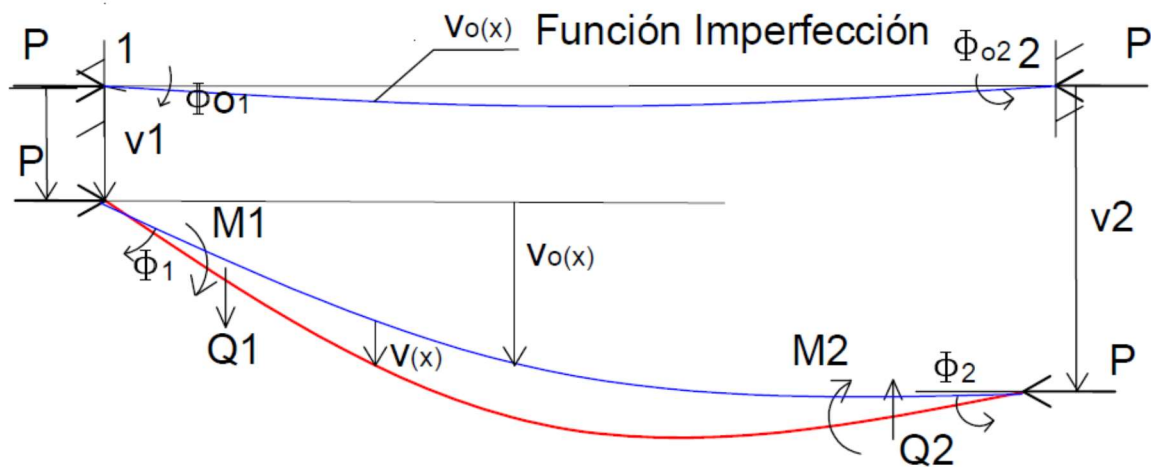


Figura 2

Siendo :

M.1 Momento Flector en el nudo 1

Q.1 Fuerza extrema de barra en el nudo 1

P Esfuerzo Axil constante a lo largo de la barra

Por lo dicho anteriormente, la ecuación de segundo orden de la línea elástica, queda

$$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

De ahora en adelante,

$$v(x)^{II} = \frac{d^2}{dx^2} v(x)$$

Luego

$$v(x)^{II} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

La función Momento Flector, $M(x)$, en una sección a una distancia x del nudo izquierdo, teniendo en cuenta al esfuerzo axil, P

$$M(x) = M_1 - Q_1 \cdot x + P \cdot (v_o(x) + v(x))$$

$$M(x) = M_1 - Q_1 \cdot x + P \cdot v_o(x) + P \cdot v(x)$$

Organiza:

Reemplazado la expresión de $M(x)$ en la (1)

$$v(x)'' = \frac{-M_1}{EI} + \frac{Q_1}{EI} \cdot x - \frac{P}{EI} \cdot v_o(x) - \frac{P}{EI} \cdot v(x) \quad (2)$$

Haciendo el reemplazo

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

La (2) queda

$$v(x)'' + k \cdot v(x) = \frac{-M_1}{EI} + \frac{Q_1}{EI} \cdot x - k^2 \cdot v_o(x) \quad (3)$$

Introduciendo en la (3) la expresión de $v_o(x)$ y reagrupando términos

$$v_o(x) = i_3 \cdot x^3 + i_2 \cdot x^2 + i_1 \cdot x$$

$$v(x)'' + k \cdot v(x) = -k^2 \cdot i_3 \cdot x^3 - k^2 \cdot i_2 \cdot x^2 + \left(-k^2 \cdot i_1 + \frac{Q_1}{EI} \right) \cdot x - \frac{M_1}{EI} \quad (4)$$

La (4) es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea, lineal.

Esta linealidad implica que es aplicable el principio de superposición de efectos.

La Solución de la (4) se expresa como

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) \quad (5)$$

$v_h(x)$ Solución de la Homogénea

$v_p(x)$ Solución de la Particular

siendo

$$v_h(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) \quad (6)$$

Para la Solución de la Particular se adopta un polinomio de igual grado que el del lado derecho de la (4), un polinomio cúbico completo.

$$v_p(x) = p_3 \cdot x^3 + p_2 \cdot x^2 + p_1 \cdot x + p_0 \quad (7)$$

Reemplazando la (7) y su derivada segunda en la (4), se obtienen la expresiones de los coeficientes de la (7)

$$p_3 = -i_3 \quad p_2 = -i_2 \quad p_1 = \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} + 6 \cdot \frac{i_3}{k^2} - i_1 \quad p_0 = \frac{i_2}{k^2} - \frac{M_1}{k^2 \cdot EI}$$

Organiza:

Obtenidos estos coeficientes y reemplazando ambas soluciones en la (5)

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) \quad (5)$$

se dispone de la solución de la Ecuación Diferencial de segundo orden no homogénea, lineal (4)

$$v(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) - i_3 \cdot x^3 - i_2 \cdot x^2 + \left(\frac{Q_1}{EI \cdot k^2} + 6 \cdot \frac{i_3}{k^2} - i_1 \right) \cdot x + \left(\frac{i_2}{k^2} - \frac{M_1}{k^2 \cdot EI} \right) \quad (8)$$

Imponiendo las condiciones de borde, se determinan los coeficientes C.1, C.2, M.1, Q.1

$$v(0) = v_1 = C_2 + \frac{i_2}{k^2} - \frac{M_1}{EI \cdot k^2}$$

$$v(L_0) = v_2 = \frac{i_2}{k^2} - L_0^3 \cdot i_3 - L_0^2 \cdot i_2 + C_2 \cdot \cos(L_0 \cdot k) + C_1 \cdot \sin(L_0 \cdot k) + L_0 \cdot \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} \right) - \frac{M_1}{EI \cdot k^2}$$

$$\phi(0) = \phi_1 = \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 + C_1 \cdot k + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2}$$

$$\phi(L_0) = \phi_2 = \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_0^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_0 \cdot i_2 + C_1 \cdot k \cdot \cos(L_0 \cdot k) - C_2 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2}$$

Expresando el sistema en forma matricial

$$M_a := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{EI \cdot k^2} & 0 \\ \sin(L_0 \cdot k) & \cos(L_0 \cdot k) & -\frac{1}{EI \cdot k^2} & \frac{L_0}{EI \cdot k^2} \\ k & 0 & 0 & \frac{1}{EI \cdot k^2} \\ k \cdot \cos(L_0 \cdot k) & -k \cdot \sin(L_0 \cdot k) & 0 & \frac{1}{EI \cdot k^2} \end{pmatrix} \quad TI := \begin{bmatrix} -\frac{i_2}{k^2} + v_1 \\ -\left(\frac{i_2}{k^2} - L_0^3 \cdot i_3 - L_0^2 \cdot i_2 - L_0 \cdot i_1 + \frac{6 \cdot L_0 \cdot i_3}{k^2} \right) + v_2 \\ -\left(-i_1 + 6 \cdot \frac{i_3}{k^2} \right) + \phi_1 \\ -\left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_0^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_0 \cdot i_2 \right) + \phi_2 \end{bmatrix}$$

Ma matriz de coeficientes, TI vector términos independientes

El sistema fue resuelto utilizando el programa Mathcad $C_o := \text{Isolve}(M_a, TI)$

C,o es el vector coeficientes, solución literal del sistema.

Organiza:

Obtenida la solución de la (8),

$$v(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) - i_3 \cdot x^3 - i_2 \cdot x^2 + \left(\frac{Q_1}{EI \cdot k^2} + 6 \cdot \frac{i_3}{k^2} - i_1 \right) \cdot x + \left(\frac{i_2}{k^2} - \frac{M_1}{k^2 \cdot EI} \right) \quad (8)$$

pueden obtenerse las funciones momento flector y esfuerzo de corte, para el elemento de barra de geometría imperfecta, teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axial.

$$M(x) = -EI \cdot \frac{d^2}{dx^2} v(x) \quad (9) \quad Q(x) = EI \cdot \frac{d^3}{dx^3} v(x) \quad (10)$$

4. EXPRESION DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ RIGIDEZ

Como el cálculo de los coeficientes de la (8) se resolvieron para las incógnitas cinemáticas actuando una a la vez, cada solución contiene los elementos de la una las columnas de la matriz rigidez, ya que, C.o3 y C.o4, es decir, el tercero y cuarto elemento del vector solución C.o, son el momento flector y la fuerza normal al eje x local del elemento, en el nudo nudo 1. En el nudo 2 se pueden evaluar por equilibrio.

4.1 NUMERACION DE LAS INCOGNITAS

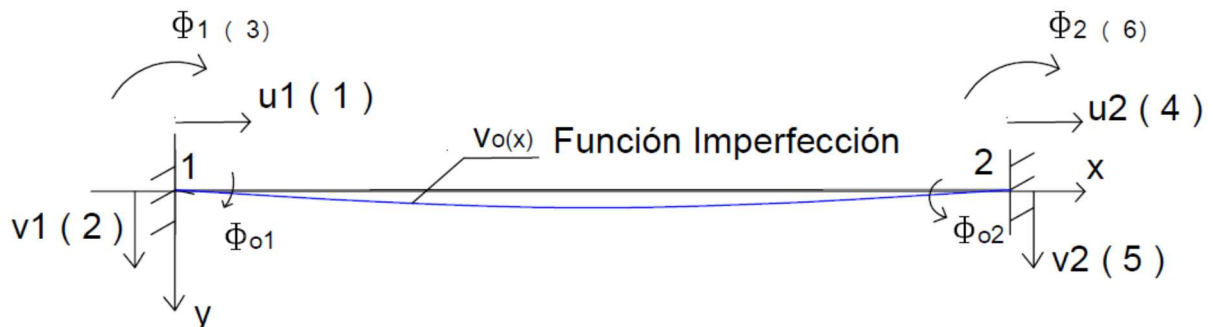


Figura 3

De la numeración indicada en la figura 3, se deducen qué elementos de cada columna de la matriz rigidez se obtienen.

al actuar la incógnita

v_1 , se obtienen elementos de la columna 2, (k_{22} , k_{32} , k_{52} , k_{62})

Φ_1 , se obtienen elementos de la columna 3, (k_{23} , k_{33} , k_{53} , k_{63})

v_2 , se obtienen elementos de la columna 5, (k_{25} , k_{35} , k_{55} , k_{65})

Φ_2 , se obtienen elementos de la columna 6, (k_{26} , k_{36} , k_{56} , k_{66})

Organiza:

Se observa que entre los elementos obtenidos no figuran ninguno de los relacionados con las columnas 1 y 4. Para obtener sus expresiones será necesario estudiar la deformación axial del eje x local del elemento debida a la flexión, en el elemento de barra con imperfecciones.

4.2 EXPRESION DE LA DEFORMACION AXIL DEBIDA A LA FLEXION

En la figura 4 se esquematiza un elemento infinitesimal de barra imperfecto, en azul, de longitud dS_o . En rojo, la configuración deformada debida a la flexión, de longitud dS . En negro, el segmento de longitud dx sobre el eje x local

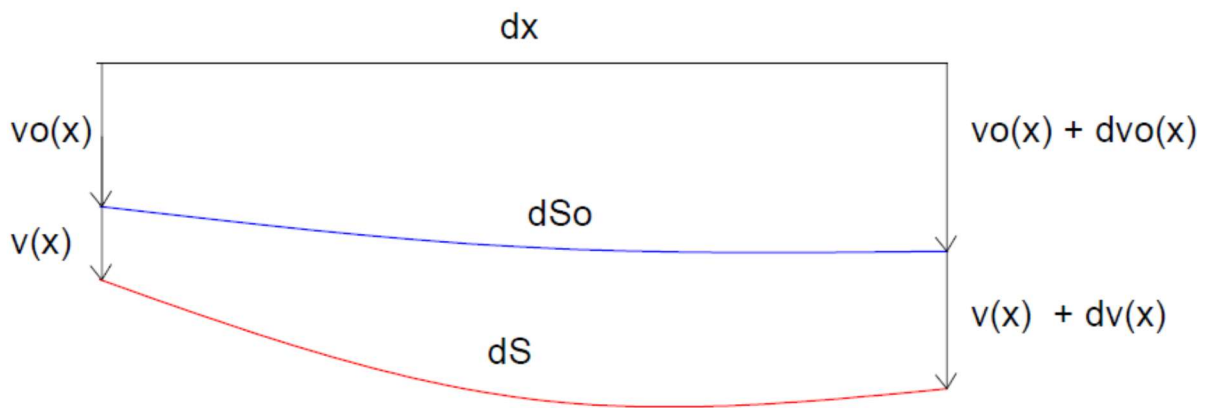


Figura 4

Deformación específica debida a la flexión

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{dS^2} - \sqrt{dS_o^2}}{dx}$$

$$dS_o^2 = dx^2 + dv_o^2$$

$$dS^2 = dx^2 + [v + dv + v_o + dvo - (v_o + v)]^2 \quad dS^2 = dx^2 + (dv_o + dv)^2$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{dx^2 + (dv_o + dv)^2} - \sqrt{dx^2 + dv_o^2}}{dx} \quad \varepsilon_x = \sqrt{1 + \left(\frac{dv_o}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{dv_o}{dx}\right)^2} \quad (11)$$

Expesando la (11) en serie, y truncando en el tercer término, la (11) queda;

$$\varepsilon_x = \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{dv_o}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv_o}{dx}\right)^2 \right] - \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv_o}{dx}\right)^2 \right]$$

Organiza:

operando, la expresión de la deformación específica longitudinal del elemento debida a la flexión, resulta

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{dv_o}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \quad (12)$$

Como $\phi(x) = \frac{d}{dx} v(x)$ $\phi_o(x) = \frac{d}{dx} v_o(x)$

la (12) se expresa $\varepsilon_x = \frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \quad (13)$

Integrando la (12) entre 0 y L.o se obtiene la variación de longitud de la barra.

Multiplicando esta variación de longitud por la rigidez axil de la barra se obtiene la fuerza axil debida a la deformación específica longitudinal del elemento debida a la flexión.

A modo de ejemplo, se detalla el cálculo de la expresión k₂₁, que por la ley de los trabajos recíprocos es igual a k₁₂, y en general k_{ij} = k_{ji}

Integrando la (13) entre 0 y L.o y teniendo en cuenta que en esta integral, $\Phi(x)$, es decir, la función rotación, es debida solo a la acción de la incógnita 2 (v₁), multiplicando a esta integral por la rigidez axil de la barra, se obtiene la fuerza axil en la dirección cinemática 1.

$$\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \quad (14)$$

Para obtener la rigidez, se debe derivar la (14) respecto de v₁ (incógnita 2)

$$k_{21} = \frac{d}{dv_1} \left[\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right] \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que la deformación específica longitudinal debida a la flexión es una función cuadrática de las incógnitas cinemáticas del elemento (15) los elementos de la matriz rigidez que se evalúen mediante la (15), variarán linealmente respecto de las incógnitas cinemáticas del elemento.

A continuación se editan los elementos de la matriz rigidez.

Organiza:

COLUMNA 1

$$k_{11} = \frac{E \cdot A_o}{L_o} \quad k_{41} = -k_{11}$$

$$k_{21} = \frac{d}{dv_1} \left[\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right] \quad k_{51} = -k_{21}$$

$$k_{31} = \frac{d}{d\phi_1} \left[\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right] \quad k_{61} = -k_{31}$$

COLUMNA 2

k.22

$$k_{22} = EI \left[2 \cdot k^2 \cdot (\cos(L_o \cdot k) - 1) + L_o \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_1$$

$$k_{22} = k_{22} + EI \left[L_o^2 \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) - 2 \cdot L_o \cdot k^2 \cdot (\cos(L_o \cdot k) + 3) \right] \cdot i_2$$

$$k_{22} = k_{22} + EI \left[\left(24 - 6 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right) \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 + \left(L_o^3 \cdot k^3 - 6 \cdot L_o \cdot k \right) \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_3$$

$$k_{22} = \frac{k_{22} + EI \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k)}{4 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k)}$$

Organiza:

k.32

$$k_{32} = EI \cdot \left[\left(8 - 2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right) \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 + 2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 - 4 \cdot L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_2$$

$$k_{32} = k_{32} + EI \cdot \left(3 \cdot L_o^3 \cdot k^2 - 2 \cdot L_o^3 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 3 \cdot L_o^2 \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right) \cdot i_3$$

$$k_{32} = k_{32} + 2 \cdot EI \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2$$

$$k_{32} = \frac{k_{32}}{\left(4 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right)}$$

k.42

$$k_{42} = \frac{d}{dv_2} \left[\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right]$$

k.52

$$k_{52} = -k_{22}$$

k.62

$$k_{62} = EI \cdot \left[\left(8 - 2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right) \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 + 2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right] \cdot i_2$$

$$k_{62} = k_{62} + EI \cdot \left[3 \cdot L_o^3 \cdot k^2 + \left(24 \cdot L_o - 4 \cdot L_o^3 \cdot k^2 \right) \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 9 \cdot L_o^2 \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_3$$

Organiza:

$$k_{6.2} = \frac{k_{62} + \left(2 \cdot EI \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 \right)}{4 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k)}$$

COLUMNA 3

k.33

$$k_{33} = \left(8 \cdot EI \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 + 2 \cdot EI \cdot L_0^2 \cdot k^2 - 4 \cdot EI \cdot L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) - 2 \cdot EI \cdot L_0^2 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 \right) \cdot i_2$$

$$k_{33} = k_{33} + \left(3 \cdot EI \cdot L_0^3 \cdot k^2 - 2 \cdot EI \cdot L_0^3 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 3 \cdot EI \cdot L_0^2 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) \right) \cdot i_3$$

$$k_{33} = k_{33} + \left[EI \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) + EI \cdot L_0 \cdot k^2 \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 1 \right) \right]$$

$$k_{33} = k_{33} \cdot \frac{1}{4 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k)}$$

k.43

$$k_{43} = \frac{d}{d\phi_1} \left[\frac{EA}{L_0} \cdot \int_0^{L_0} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right]$$

k.53

$$k_{53} = \left(4 \cdot EI \cdot L_0 \cdot k^2 \cdot \cos\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 4 \cdot EI \cdot L_0^2 \cdot k^2 + EI \cdot L_0^2 \cdot k^3 \cdot \sin(L_0 \cdot k) \right) \cdot i_2$$

Organiza:

$$k_{53} = k_{53} + EI \left[\left(6 \cdot L_o^2 \cdot k^2 - 24 \right) \cdot \cos \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 + \left(L_o^3 \cdot k^3 - 6 \cdot L_o \cdot k \right) \cdot \sin(L_o \cdot k) + 24 - 6 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right] \cdot i_3$$

$$k_{53} = k_{53} + \left(EI \cdot L_o \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) - 2 \cdot EI \cdot k^2 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 \right)$$

$$k_{53} = \frac{k_{53}}{\left(4 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right)}$$

k.63

$$k_{63} = EI \cdot \left[\left(8 - 2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right) \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 + 2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 - 4 \cdot L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_2$$

$$k_{63} = k_{63} + EI \cdot \left[\left(24 \cdot L_o - 4 \cdot L_o^3 \cdot k^2 \right) \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 + \left(3 \cdot L_o^3 \cdot k^2 - 9 \cdot L_o^2 \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right) \right] \cdot i_3$$

$$k_{63} = k_{63} + EI \cdot k \cdot \left(\sin(L_o \cdot k) - L_o \cdot k \right)$$

$$k_{63} = \frac{k_{63}}{\left(4 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right)}$$

COLUMNA 4

$$k_{44} = \frac{EA}{L_o} \quad k_{54} = \left[\frac{d}{dv_2} \left[\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right] \right]$$

$$k_{64} = \left[\frac{d}{d\phi_2} \left[\frac{EA}{L_o} \cdot \int_0^{L_o} \left(\frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \right) dx \right] \right]$$

Organiza:

COLUMNA 5

k.55

$$k_{55} = EI \cdot \left[4 \cdot k^2 \cdot \left(\cos \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - 1 \right) + L_o \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot t_1$$

$$k_{55} = k_{55} + EI \cdot \left[4 \cdot L_o \cdot k^2 \cdot \left(\cos \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - 1 \right) + L_o^2 \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_2$$

$$k_{55} = k_{55} + EI \cdot \left[\left(24 - 6 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \right) \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 + \left(L_o^3 \cdot k^3 - 6 \cdot L_o \cdot k \right) \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_3$$

$$k_{55} = \frac{k_{55} + EI \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k)}{4 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k)}$$

k.65

$$k_{65} = EI \cdot \left[2 \cdot L_o^2 \cdot k^2 \cdot \left(\sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - 1 \right) - 8 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 + 4 \cdot L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_2$$

$$k_{65} = k_{65} + EI \cdot \left[L_o^2 \cdot i_3 \cdot k \cdot \left(2 \cdot L_o \cdot k \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 + 3 \cdot \sin(L_o \cdot k) - 3 \cdot L_o \cdot k \right) \right] \cdot i_3$$

$$k_{65} = \frac{k_{65} + 2 \cdot EI \cdot k^2 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2}{4 \cdot \sin \left(\frac{L_o \cdot k}{2} \right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k)}$$

Organiza:

COLUMNA 6

k.66

$$k_{66} = EI \cdot \left[8 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 2 \cdot L_0^2 \cdot k^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 1 \right) - 4 \cdot L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) \right] \cdot i_2$$

$$k_{66} = k_{66} + EI \cdot \left[L_0^2 \cdot i_3 \cdot k \cdot (2 \cdot L_0 \cdot k - 3 \cdot \sin(L_0 \cdot k) + L_0 \cdot k \cdot \cos(L_0 \cdot k)) \right] \cdot i_3$$

$$k_{66} = \frac{k_{66} + EI \cdot k \cdot (L_0 \cdot k - \sin(L_0 \cdot k))}{4 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k)}$$

5 BARRA IMPERFECTA SOMETIDA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA, TENIENDO EN CUENTA LA INFLUENCIA DEL ESFUERZO AXIL

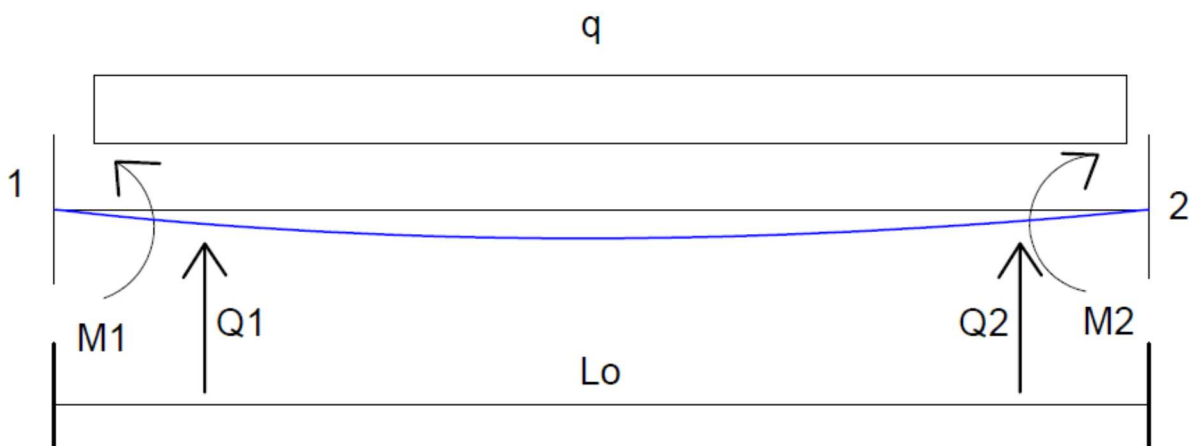


Figura 5?

Función Momento Flector $M(x) = -M_1 + Q_1 \cdot x - q \frac{x^2}{2}$

Para arribar a la solución del objetivo propuesto, solo se debe modificar el vector de términos independientes TI, teniendo en cuenta que, para este estado de cargas, la imposición de las condiciones de borde son : $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$

Organiza:

Vector Términos Independientes

$$TI := \begin{bmatrix} \left(\frac{2 \cdot i_2}{k^2} - \frac{q}{EI \cdot k^4} \right) \\ \frac{2 \cdot i_2}{k^2} - L_o^3 \cdot i_3 - L_o \cdot \left(i_1 - \frac{6 \cdot i_3}{k^2} \right) - L_o^2 \cdot \left(i_2 - \frac{q}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) - \frac{q}{EI \cdot k^4} \\ \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_o^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_o \cdot \left(i_2 - \frac{q}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) \end{bmatrix}$$

De la resolución del sistema se obtiene la elástica de la barra, y derivando 2 y tres veces las funciones momento flector y esfuerzo de corte, respectivamente. También, el elemento 3 del vector solución es el momento flector en el nudo 1, (M_1) y el 4 la fuerza extrema de barra en el mismo nudo (Q_1). Se editan sus expresiones a continuación.

$$M_1 = EI \cdot \left(8 \cdot k^2 - 8 \cdot k^2 \cdot \cos\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 + 2 \cdot L_o^2 \cdot k^4 \cdot \cos\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 4 \cdot L_o \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) \right) \cdot i_2$$

$$M_1 = M_1 + EI \cdot L_o^2 \cdot k^3 \cdot (2 \cdot L_o \cdot k - 3 \cdot \sin(L_o \cdot k) + L_o \cdot k \cdot \cos(L_o \cdot k)) \cdot i_3$$

$$M_1 = \frac{M_1 + \left[q \cdot \cos\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 \cdot (4 - L_o^2 \cdot k^2) + q \cdot (2 \cdot L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) - 4) \right]}{4 \cdot k^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 1 \right) + L_o \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k)}$$

$$Q_1 = EI \cdot \left[8 \cdot k^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 1 \right) + 2 \cdot L_o \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_1$$

$$Q_1 = Q_1 + EI \cdot \left[8 \cdot L_o \cdot k^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 1 \right) + 2 \cdot L_o^2 \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) \right] \cdot i_2$$

Organiza:

$$Q_1 = Q_1 + EI \cdot \left(48 \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 12 \cdot L_0^2 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right) + 2 \cdot L_0^3 \cdot k^3 \cdot \sin(L_0 \cdot k) - 12 \cdot L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) \right) \cdot i_3$$

$$Q_1 = \frac{Q_1 + L_0 \cdot q \cdot \left(4 \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) \right)}{8 \sin\left(\frac{L_0 \cdot k}{2}\right)^2 - 2 \cdot L_0 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k)}$$

M₂ y Q₂ se pueden obtener por equilibrio.

6. EJEMPLO NUMERICO

Se resuelve a continuación un ejemplo muy sencillo: una barra simplemente apoyada, de geometría perfecta, sometida a una carga uniformemente repartida, q , y un esfuerzo axial P .

Geometría :

Longitud $L_0 = 4 \text{ m}$

Sección IPN 200 Momento de Inercia = 2140 cm^4

Material Acero $E = 206000 \text{ MPa}$

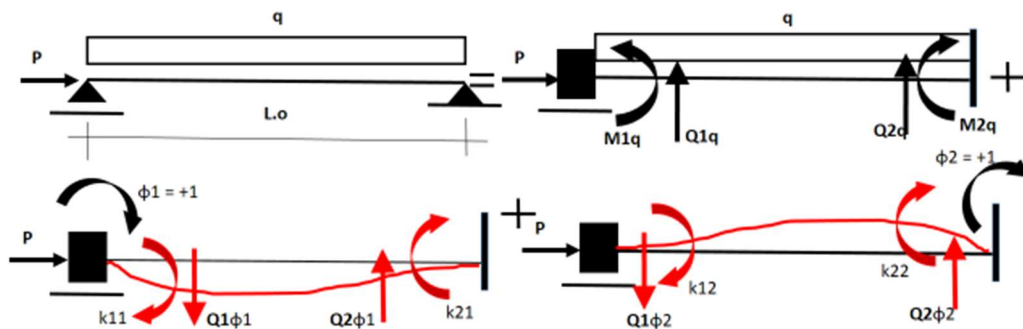
Cargas

$q = 3 \text{ kN / m}$ $P = 700 \text{ kN}$

Los valores de cargas fueron adoptados de tal manera de que no se superara el valor de la tensión de fluencia del material adoptado, igual a 240 MPa .

Solución Aplicando el Método de las Incógnitas Cinemáticas.

Los valores de rigideces y esfuerzos en la estructura fundamental se calcularon con las expresiones halladas en las páginas anteriores.



Organiza:

Matriz Rigidez

$$M_K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_K = \begin{pmatrix} 452.192207 & 259.111697 \\ 259.111697 & 452.192207 \end{pmatrix}$$

Vector Términos Independientes

$$e_o = \begin{pmatrix} e_{o1} \\ e_{o2} \end{pmatrix}$$

$$e_o = \begin{pmatrix} -0.469537 \\ 0.469537 \end{pmatrix}$$

Vector Solución

$$X = \text{Isolve}(M_K, -e_o) = \begin{pmatrix} 2.432 \times 10^{-3} \\ -2.432 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Momento Flector en el Nudo 1 (Nudo izquierdo)

$$-0.469537 + 452.192207 \cdot X_1 + 259.111697 \cdot X_2 = 0$$

Momento Flector en el Nudo 2 (Nudo derecho)

$$-0.469537 + -259.111697 \cdot X_1 + -452.192207 \cdot X_2 = 0$$

Momento Flector en el Centro del Tramo

$$M_q \left(\frac{L_o}{2} \right) + M_{\phi 1} \left(\frac{L_o}{2} \right) \cdot X_1 + M_{\phi 2} \left(\frac{L_o}{2} \right) \cdot X_2$$

$$0.242461 + 137.999312 \cdot X_1 \cdot 2 = 0.914 \quad \text{tonf} \cdot \text{m}$$

Este valor se lo compara con la solución dada por la referencia (8) página 482

$$M_{\max} = \frac{q}{k^2} \cdot \frac{1 - \cos \left(\frac{k \cdot L_o}{2} \right)}{\cos \left(\frac{k \cdot L_o}{2} \right)} = 0.914 \quad \text{tonf} \cdot \text{m}$$

Organiza:

7 CONCLUSIONES

Las expresiones de los elementos de la matriz rigidez halladas en este trabajo, al igual que las fuerzas y pares extremos de barra para el elemento de iguales características sometida a una carga uniformemente repartida, han sido solo verificadas para el caso en el cual P (esfuerzo axial) tiende a cero. Contar con la solución del elemento sometido a cargas transversales al eje de referencia, x local, permitirá estudiar la estabilidad de estructuras reduciendo considerablemente el número de elementos lo cual queda demostrado en el ejemplo resuelto en el punto 6, ejemplo que además, demuestra la exactitud de las expresiones halladas. Todas las expresiones fueron deducidas a partir de la solución de la ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de la línea elástica, teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axial, del elemento de barra de geometría imperfecta, lo cual permitirá modelar estructuras de geometría imperfecta tal como lo solicitan las normas vigentes; pero su aplicación para tal fin deberá respetar las limitaciones que imponen las hipótesis de partida adoptadas al desarrollar el trabajo, que básicamente son, las de la Resistencia de los materiales, lo cual también permitió que las integrales fueran analíticamente evaluadas sobre la geometría indeformada, esto es, sobre el eje x local del elemento.

8 PROXIMOS OBJETIVOS

- 7.1 Resolver estructuras más complejas (pórticos, arcos)
- 7.2 Barras de inercia variable
- 7.3 Determinar los límites de imperfección admisibles bajo las hipótesis adoptadas.
- 7.4 Solución de la barra bi empotrada imperfecta (punto 5) sometida a otros estados de carga estáticas (Fuerza y Par concentrados, cargas repartidas variables)

9 REFERENCIAS

1. Zienkiewicz OC y Taylor R.L., (1989), *The Finite Element Method – Vol 1 Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill Book Co.
2. Martinez Daniel, (2014) *Implementación del Método de Análisis Directo según AISC para el Análisis de la estabilidad y el diseño de estructuras metálicas esbeltas aporricadas*, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, UTN FRA Avellaneda, Argentina
3. *-Apuntes de Cátedra Inestabilidad del Equilibrio* de la Maestría en Ingeniería Estructural, Alberto Puppo, FRA UTN, 2009.
4. *Apuntes de Cátedra Estabilidad III* de la carrera de grado de Ingeniería Civil, Verdi, Carlos Alberto, FRA UTN, 198
5. *Investigation into the structural behaviour of portal frame*, Chantal Rudman, Thesis presented in partial fulfillment of the for the degree of Master of Science in Engineering at the University of Stellenbosch, March 2009
6. *Resistencia de Materiales*, Segunda parte, Teoría y Problemas mas Complejos, S. Timoshenko, Espasa Calpe S.A., Madrid 1978.

Organiza:



- 7 *Stability of bay symmetrical frame with nonuniform members*, F. Irani, Journal of Engineering, Islamic Republic of Iran, 1987.
- 8 *Resistencia de materiales*, V. I. Feodosiev, Ediciones Sapiens, Buenos Aires, Argentina, 1976.
- 9 *Effects of nonverticality on Steel Framing Systems, Implications for Design*, Andrea E. Suroveak and Justin Johnson, Engineering Journal, First quarter, 2008.
- 10 *Stability Analysis and the 2005 AISC Specification*, Shankar Nair, Modern steel construction, May 2007
- 11 *CIRSOC 301*, Reglamento argentino de estructuras de acero para edificios, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- 12 *CIRSOC 301*, Comentarios al Reglamento argentino de estructuras de acero para edificios, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- 13 *ANSI/AISC 360-05*, Specification for structural steel building, American Institute of Steel Construction, Chicago USA, 2005.
- 14 *Eurocode 3*, Design of steel structures. General rules and rules for buildings, Europa 2005.
- 15 *ABNT NBR 8800*, Projeto de estruturas de aço e concreto de edificios, Brasil, 2008.

Organiza:



Tel/Fax: [+54] 11 5252.8838 | Whatsapp: [+54 9] 11 3180.3746 | Hipólito Yrigoyen 1144 Piso 1° - Of. 2 | Buenos Aires
Horario de atención: de lunes a viernes de 13:00 a 18:00 hs. | Mail: info@jornadasaie.org.ar - www.jornadasaie.org.ar