

AMORTIGUADOR DE MASA DE EDIFICIO BASADO EN INERTER: ESTUDIO EXPERIMENTAL A ESCALA REDUCIDA

Garrido, Hernán¹; Domizio, Martín; Curadelli, Oscar; Ambrosini, Daniel

¹ Doctor en ingeniería; CONICET, Universidad Nacional de Cuyo.

E-mail: carloshernangarrido@gmail.com

RESUMEN

El amortiguador de masa de edificio es un concepto de diseño para el control de vibraciones de estructuras en el que la subestructura superior se comporta efectivamente como un amortiguador de masa sintonizado (AMS) para la subestructura inferior. Desgraciadamente, su sintonización suele requerir el aislamiento parcial de la subestructura superior, lo que limita su aplicabilidad para la rehabilitación estructural. El recientemente propuesto Amortiguador de Masa de Edificio basado en Inerter (AMEI) es una intervención en paralelo en la subestructura superior con un inerter y un amortiguador. Así, el inerter permite una sintonía correcta, la subestructura superior proporciona la masa y el amortiguador añade el amortiguamiento. Por lo tanto, se obtiene un AMS de gran relación de masas con un peso adicional marginal y un impacto práctico mínimo. En el presente trabajo, las pruebas experimentales apoyadas por simulaciones numéricas en un pequeño modelo de estructura de dos pisos confirman cuantitativamente la eficacia del AMEI. Además, se introduce un innovador diseño de mecanismo flexible para la implementación del convertidor de traslación-rotación que acciona el inerter. Este tiene un juego mecánico y una fricción mínimos y a su vez permite grandes carreras. En los experimentos se utilizó un amortiguador de fricción, cuyo comportamiento fue comparable al de un amortiguador viscoso lineal considerado en las simulaciones.

ABSTRACT

The Building Mass Damper is a design concept for vibration control of structures where the upper substructure effectively behaves as a Tuned Mass Damper (AMS) for the lower one. Unfortunately, its tuning usually requires softening or partial isolation of the upper substructure; limiting its applicability for retrofitting. The recently proposed Inerter-based Building Mass Damper (IBMD) is an in-parallel intervention on the upper substructure with an inerter and a damper. Thus, the inerter allows correct Tuning, the upper substructure provides the Mass, and the damper adds the Damping. Therefore, a very large mass-ratio AMS is obtained with marginal additional weight and minimal practical impact. In the present work, experimental tests supported by numerical simulations on a small two-story structure model quantitatively confirm the effectiveness of the IBMD. Besides, an innovative compliant mechanism design is introduced for the implementation of the translation-rotational converter that drives the inerter; which has minimal backlash and friction, still allowing large strokes. The experiments involved a frictional damper, which performed comparable to a linear viscous damper considered in the simulations.

Organiza:

INTRODUCCIÓN

Un amortiguador de masa sintonizada (AMS) es un oscilador mecánico capaz de absorber y disipar la energía vibratoria de una estructura; que se ha utilizado ampliamente en edificios, mecanismos y otras estructuras. Una condición necesaria para su correcto funcionamiento es la sintonía entre la frecuencia natural del AMS y la de la estructura. El AMS tiene la ventaja adicional de utilizar una masa como punto de reacción inercial, funcionando así como un elemento mecánico de un solo terminal. Esta ventaja práctica elimina la necesidad de construir una estructura de reacción separada o de conectar el dispositivo a otras partes de la estructura que tengan respuestas diferentes¹, como se requiere cuando se utilizan amortiguadores clásicos². En cambio, permite ejercer fuerzas disipativas directamente en la parte superior de un edificio independientemente de su altura; véase, por ejemplo, el famoso caso del Taipei 101³.

El AMS fue propuesto originalmente a principios del siglo pasado por Frahm⁴, y luego ampliamente estudiado por muchos investigadores. Entre ellos, probablemente los más importantes son Den Hartog⁵, Brock⁶ y Warburton⁷. Los dos primeros encontraron expresiones cerradas para los parámetros óptimos (sintonía y amortiguamiento) en los años 40, suponiendo una estructura no amortiguada y utilizando la técnica de los puntos fijos. El tercero proporcionó en los años 80 un conjunto completo de fórmulas para los parámetros óptimos, y para diferentes casos de carga y objetivos; pero suponiendo una estructura amortiguada. Un AMS puede realizarse de diferentes maneras, por ejemplo, utilizando péndulos, líquidos u otros mecanismos restitutivos. En este sentido, la investigación en las últimas décadas se ha dedicado al diseño óptimo teniendo en cuenta no sólo los parámetros básicos, sino también la implementación adoptada; por ejemplo, véase⁸.

La eficacia de un AMS debidamente sintonizado depende principalmente de su relación de masas con respecto a la estructura. Además, las relaciones de masas grandes conducen a deformaciones menores en las partes elásticas y disipativas del dispositivo, lo cual es ventajoso ya que simplifica los detalles de diseño. Sin embargo, los dispositivos de gran masa pueden ser problemáticos debido a la adición de peso a la estructura y su consecuente detrimento de la seguridad debido al efecto P-Delta⁹. Por ello, se ha intentado utilizar una parte de la estructura como masa para el AMS. Este interesante concepto de diseño fue estudiado en primer lugar como configuraciones de mega-estructuras por Feng y Mita¹⁰; y posteriormente por Ziyaeifar y Noguchi¹¹, que propusieron aislar una parte de la estructura mediante una capa aislante situada en una altura específica de un edificio. Demostraron un desempeño deseable para diversas aplicaciones mediante el análisis numérico de algunos ejemplos básicos. Posteriormente, el mismo concepto de diseño se ha estudiado bajo diferentes nombres con variaciones en la implementación. Entre ellos se incluyen el Aislamiento Parcial de Masas¹¹, el Amortiguador de Masas Propio¹², el Aislación de Piso Intermedio¹³, el Amortiguador de Masas de Piso Superior¹⁴, y el Amortiguador de

Organiza:

Masas del Edificio (AME)¹⁵. Entre ellos, el nombre más común es AME (*building mass damper, BMD*), y por lo tanto es el nombre adoptado en el presente trabajo.

A pesar de estas investigaciones, el concepto de diseño de AME tiene la siguiente importante limitación práctica. Cuando una estructura se divide conceptualmente en dos subestructuras, una condición necesaria para que la superior se comporte como un AMS para la inferior es que los dos modos de vibración principales estén acoplados. A su vez, el acoplamiento de modos requiere que las frecuencias naturales correspondientes estén próximas; lo que no es habitual en estructuras en cadena con subestructuras de masa y rigidez similares¹⁶. El principal problema es que, para acercar las frecuencias naturales, la subestructura superior debe hacerse más flexible, o la subestructura inferior más rígida. La rigidización estática de la subestructura inferior es una solución trivial para el control de las vibraciones, que es bien conocida y, por lo tanto, queda fuera del alcance del presente trabajo. Además, la rigidización de la subestructura inferior implica otros problemas como la depreciación del estilo arquitectónico y la funcionalidad. Obsérvese, por ejemplo, que los edificios reservan los primeros pisos para estacionamiento y vestíbulos. Por estas razones prácticas, el presente trabajo pretende conseguir resultados similares al del AME, pero evitando la intervención de la estructura inferior.

La flexibilización estática de la subestructura superior, por otro lado, puede realizarse mediante el uso de aisladores, y esa es la implementación clásica del AME en la literatura relevada. La flexibilización estática mediante aisladores es inherentemente una intervención *en serie*; que es factible para nuevas estructuras. Sin embargo, reacondicionar una estructura dividiéndola físicamente en dos es una solución muy poco atractiva debido a las complejas tareas que conllevaría. En un trabajo muy reciente de estos autores¹⁷, se propone una solución *en paralelo* para el problema de la flexibilización de la subestructura superior. La clave está en utilizar la flexibilización dinámica inducida por un inerter^{18,19}. Un inerter es un dispositivo mecánico de dos terminales que ejerce una fuerza proporcional a la aceleración relativa de sus extremos. Así, en la analogía eléctrica con la terna inductor/resistor/capacitor, el inerter completa la terna resorte/amortiguador/inerter. La rigidez dinámica, a la frecuencia ω , de un resorte con rigidez estática k en paralelo con un inerter con inercia b es $k - \omega^2 b$.

En ¹⁷, el AME basado en Inerter (AMEI) fue optimizada para norma H infinito utilizando una metodología analítico-numérica basada en la técnica de los Puntos Fijos de Den Hartog^{5,6}. Los resultados de esa investigación inicial fueron muy prometedores, aunque consideraban una estructura no amortiguada y eran sólo teóricos. Lo que es más importante, la ausencia de un diseño detallado del inerter y de experimentos plantea dudas sobre los posibles problemas derivados de la masa parásita (las masas de las piezas necesarias para implementarlo) y la flexibilidad en las implementaciones de un inerter en el mundo real. Así pues, en el presente trabajo se revisa el modelo más sencillo de un AMEI. A continuación, se lleva a cabo un programa experimental que incluye un innovador diseño de inerter que utiliza un mecanismo flexible, junto con una estrategia de optimización empírica.

Organiza:

MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático considerado en este trabajo representa el modelo experimental mostrado en la Fig. 1(a). Se trata de un sistema mecánico de 2 Grados de Libertad (GDLs) que representa una estructura en forma de cadena compuesta por una subestructura inferior (GDL 1), cuyo desplazamiento respecto a la base es $x_{01}(t)$; y una subestructura superior (GDL 2), cuyo desplazamiento respecto a la base es $x_{02}(t)$ (ver Fig. 1(b)). El marco de referencia es la base de la estructura y está relacionado con el GDL 0, que se eliminará de las ecuaciones de movimiento, ya que tiene desplazamientos prescritos.

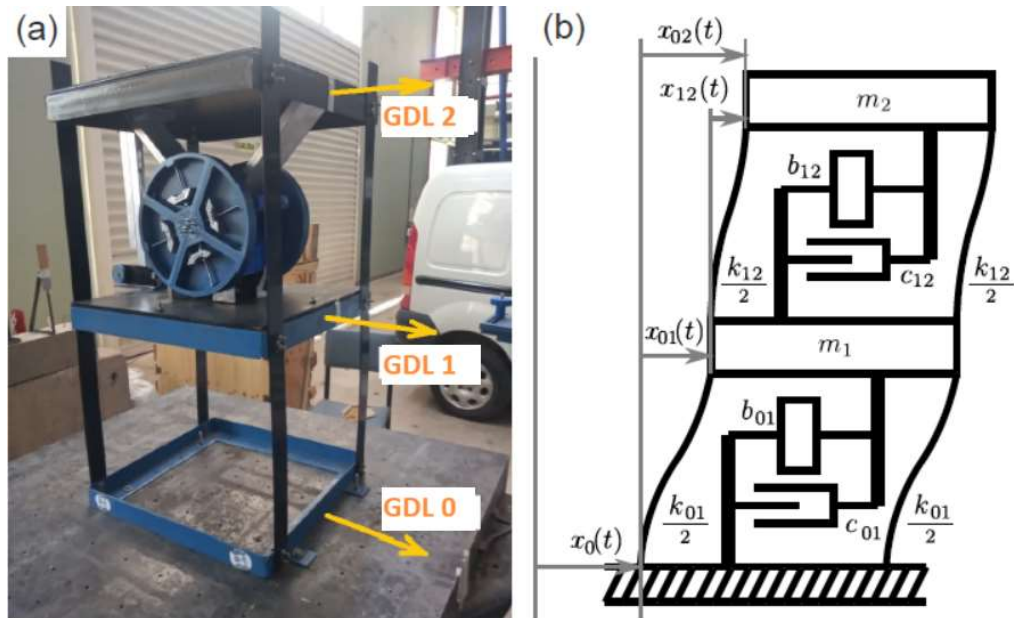


Figura 1. (a) Fotografía de la estructura, fijada a la mesa vibratoria, incluyendo el inerter y el amortiguador para formar el AMEI. (b) Esquema del modelo matemático.

Las masas del sistema son m_1 y m_2 , y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento son:

$$k_{01} = k_{01s} + k_{01add}, \quad k_{12} = k_{12s} + k_{12add} \quad (1)$$

y

$$c_{01} = c_{01s} + c_{01add}, \quad c_{12} = c_{12s} + c_{12add} \quad (2)$$

respectivamente; donde el subíndice s representa *estructural* y add representa *externamente añadido a la estructura*. El subíndice 01 representa *en la subestructura inferior* (es decir, de GDL 0 al GDL 1); mientras que el subíndice 12 representa *en la subestructura superior* (es decir, del GDL 1 al GDL 2). Las inertancias de los inertes que unen dos GDL consecutivos se denotan como b_{01} y b_{12} .

Organiza:

El amortiguamiento estructural inherente se asume como amortiguamiento proporcional a la rigidez de Rayleigh¹⁶, es decir:

$$c_{01s} = \beta_d k_{01s}, \quad c_{12s} = \beta_d k_{12s}, \quad c_{12} = c_{12s} + c_{12add} \quad (2)$$

donde β_d es un parámetro a identificar empíricamente en la estructura. Este sencillo modelo de amortiguamiento es especialmente adecuado para estructuras similares a cadenas, como se muestra en la Fig. 1, en las que la disipación se produce principalmente dentro de los elementos estructurales y no debido a la interacción con el entorno.

Dado que no se considera ninguna intervención en la subestructura inferior, que no se supone ninguna inertancia inherente a la estructura y que el planteamiento propuesto carece de aislamiento, se deduce lo siguiente:

$$k_{01add} = c_{01add} = b_{01} = 0, \quad k_{12add} \geq 0 \quad (3)$$

aunque esta última restricción se incumple en los estudios numéricos para generar un AME clásico para una evaluación comparativa.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema se pueden escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{x}}_s(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}}_s(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{x}_s(t) = \mathbf{f}_s(t) \quad (4)$$

donde $\mathbf{x}_s(t) = [x_{01}(t) \ x_{02}(t)]^T$ contiene los desplazamientos relativos a la base; las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento son, respectivamente:

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} m_1 + b_{12} & -b_{12} \\ -b_{12} & m_2 + b_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} c_{01} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

y $\mathbf{f}_s(t)$ es un vector de fuerzas que actúan sobre las masas m_1 y m_2 , el cual se calcula como:

$$\mathbf{f}_{s(t)} = \begin{bmatrix} f_{1(t)} \\ f_{2(t)} \end{bmatrix} = -\ddot{x}_0(t) \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

para la excitación sísmica de la base con aceleración $\ddot{x}_0(t)$, que es el caso estudiado en el presente trabajo.

Aquí, dos respuestas son de interés; es decir, $x_{01}(t)$ y $x_{12}(t) = x_{02}(t) - x_{01}(t)$. En el caso más general, estas son las deformaciones de las subestructuras; pero en el modelo experimental de la Fig. 1 estas son las deformaciones entre pisos. Basándose en estas respuestas de interés y en la excitación de la base, las siguientes dos Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRFs) son de interés:

$$H_{01}(\omega) = \frac{F\{x_{01}(t)\}}{F\{\ddot{x}_0(t)\}} = \frac{X_{01}(\omega)}{\omega^2 X_0(\omega)} \quad (7)$$

y

Organiza:

$$H_{12}(\omega) = \frac{F\{x_{12}(t)\}}{F\{\ddot{x}_0(t)\}} = \frac{X_{12}(\omega)}{\omega^2 X_0(\omega)} \quad (7)$$

donde F denota la Transformada de Fourier, y ω representa la frecuencia angular de la excitación armónica. Sus correspondientes normas H infinito se denotan como $\|H_{01}\|_\infty$ y $\|H_{12}\|_\infty$.

ENSAYOS EXPERIMENTALES

El concepto de AMEI también se estudia en un modelo experimental de 2 GDLs y 1 m de altura; que se muestra en las Figs. 1 y 2(a). Este modelo se fabricó íntegramente en acero y las masas concentradas equivalentes resultaron ser las siguientes. La masa global asociada a la subestructura inferior es de 32.37 kg (medida directamente). Esto incluye un marco y una placa en el primer piso, las cuatro mitades superiores de las columnas de la subestructura inferior y las cuatro mitades inferiores de las columnas de la subestructura superior. Por otro lado, la masa global asociada a la subestructura superior es de 26.01 kg (medida directamente). Esto incluye un marco y una placa en el segundo piso, y las cuatro mitades superiores de las columnas de la subestructura superior.

El objetivo principal de la estrategia de control es reducir la deformación de la subestructura inferior mediante un inerter y un amortiguador, instalados en la subestructura superior. Para ello, se pretende que la subestructura superior se comporte como un Amortiguador de Masa Sintonizado (AMS) para la subestructura inferior. El estudio experimental previo requiere diseñar el inerter y el amortiguador, lo que se expone en esta sección; mientras que el inerter se caracteriza en la siguiente.

Diseño del inerter

El diseño clásico de los inerters suele implicar el uso de un convertidor rotacional a traslacional y un volante de inercia, donde el primero suele ser un mecanismo de piñón y cremallera (o un husillo de bolas). Esta es una buena opción cuando la carrera del inerter se espera que sea grande, como en los sistemas de suspensión de automóviles¹⁹. Sin embargo, en el control de vibraciones de estructuras, las deformaciones suelen ser tan pequeñas que son comparables con el paso de la cremallera y, a veces, con el juego. Por otra parte, el rozamiento debe ser lo suficientemente bajo como para presentar un amortiguamiento lineal equivalente que no supere el coeficiente de amortiguamiento óptimo.

Se propone entonces, para la concepción del prototipo, un mecanismo flexible que consiste en un eje cilíndrico de plástico impreso en 3D que se apoya en un rodamiento de acero en cada extremo. El eje tiene tres ranuras radiales para fijar los extremos de tres cintas de acero: una central y dos laterales. La vista en sección transversal de la Fig. 2(b) sólo muestra una de las cintas laterales y la mitad de la cinta central (9 en la Fig. 2(b)). Las cintas se tensan de tal manera que las cintas laterales equilibren la fuerza de la cinta central. Cuando el eje gira en el sentido de las agujas del reloj, la

Organiza:

cinta central se enrolla mientras que las cintas laterales se desenrollan; y viceversa. Los extremos restantes de las tres cintas se fijan a los extremos de una placa de traslación de madera (5 en Fig. 2(b)) mediante un dispositivo de fijación. Por lo tanto, el movimiento de la placa de traslación hacia la derecha (con respecto al soporte) está cinemáticamente acoplado a la rotación del eje en el sentido de las agujas del reloj, y viceversa. Obsérvese el sutil cambio de bobinado entre la Fig. 2(c) y la Fig. 2(d). La relación de transmisión en este mecanismo es la inversa del radio del eje; que resultó de 19 mm en el prototipo. Por su parte, la placa traslacional está rígidamente acoplada a la subestructura superior mediante un arriostramiento en V de aluminio (6 en la Fig. 2(b)). De este modo, la placa traslacional y el piso superior tienen prácticamente el mismo desplazamiento.

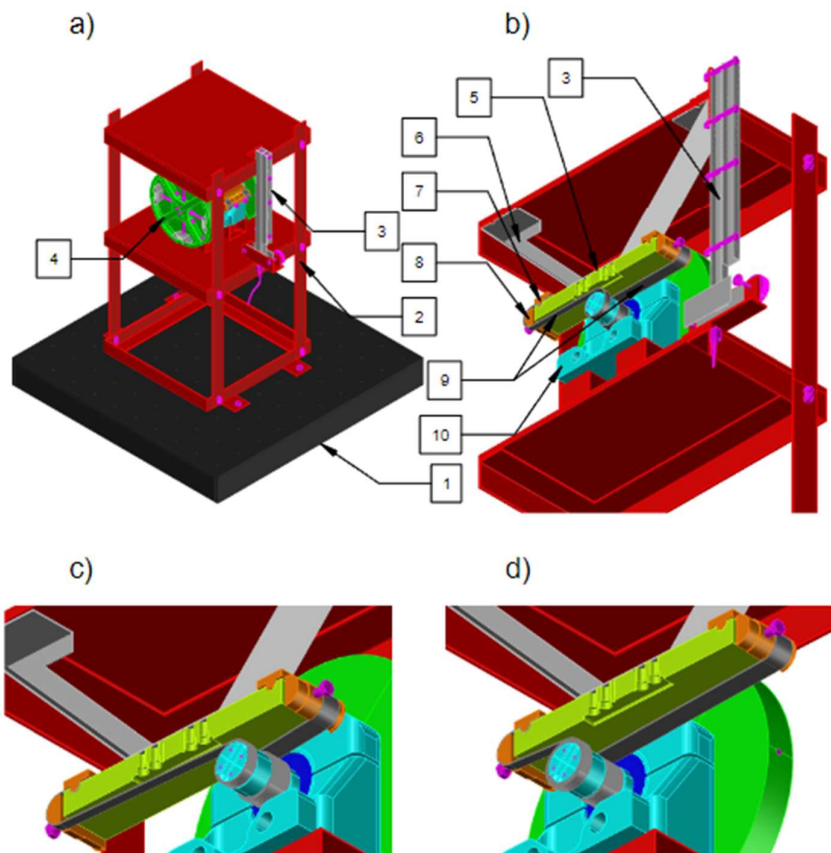


Figura 2. Vista tridimensional del AMEI: (a) vista general; (b) sección transversal; (c) sección transversal ampliada con $x_{12}(t) < 0$; (d) sección transversal ampliada con $x_{12}(t) > 0$. Referencias: (1) mesa vibratoria, (2) estructura a controlar, (3) amortiguador de fricción, (4) volante de inercia, (5) placa de traslación, (6) arriostramiento en V, (7) dispositivo de fijación, (8) dispositivo tensor, (9) cintas, (10) eje del volante de inercia y su soporte.

La masa total del inerte, que puede clasificarse como parásito, resultó ser de 6,3
Organiza:

kg. Por tanto, el inerter prototipado puede alcanzar inercias entre 12 y 16 veces su propia masa, aproximadamente. A efectos de modelización, la masa del inerter puede dividirse en tres: (1) la masa acoplada traslacionalmente a la subestructura inferior, que incluye el eje, la carcasa del volante, los bloques de plomo, el soporte del eje, los rodamientos y la bulonería, resultante en 5.7 kg; (2) la masa acoplada en traslación a la subestructura superior, que incluye la placa de traslación, los dispositivos de fijación y tensado, el arriostramiento en V y los bulones, lo que supone 0.6 kg; y la masa de las cintas, que es insignificante, ya que están fabricadas con una cinta de acero templado de 1 m de longitud, 10 mm de ancho y 0.5 mm de espesor.

Diseño del amortiguador de fricción

La propuesta de control presentada en este trabajo requiere tanto un inerter ajustable como un amortiguador ajustable. Para implementar este último, se emplea un amortiguador de fricción (3 en la Fig. 2), en el que la fuerza normal se regula mediante un mecanismo de tornillo y tuerca que reacciona contra una viga elástica. La tuerca permanece fija, mientras que el tornillo está equipado con una rueda de plástico que facilita el recuento de sus vueltas. Las zapatas de fricción son de teflón y aluminio, lo que permite un movimiento suave con una incidencia mínima del fenómeno stick-slip. La fuerza normal puede ajustarse desde la ausencia de contacto hasta el bloqueo completo del movimiento relativo de las subestructuras. De este modo, el amortiguamiento viscoso lineal equivalente de este amortiguador de fricción puede ajustarse en un amplio rango; garantizando así la posibilidad de encontrar el amortiguamiento óptimo.

Las fuerzas de amortiguamiento producidas por el amortiguador de fricción se transmiten a la subestructura superior utilizando una viga rígida de aluminio. Esta viga está formada por dos tubos de sección transversal cuadrada que están unidos a corte mediante cuatro conjuntos de bulón y tuerca; la Fig. 2(b) sólo muestra una mitad de cada tubo.

PRUEBAS DE VIBRACIÓN LIBRE PARA LA IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA

La configuración del ensayo consistió en un único instrumento destinado a medir simultáneamente: los desplazamientos de ambas subestructuras, es decir, los GDL 1 y 2 (el GDL 0 es estacionario), y la rotación del volante de inercia. Este instrumento único es una cámara de alta velocidad Chronos 2.1-HD, de Kron Technologies, con una tasa de captura de imágenes de 500 fps, un tiempo de exposición de 100% (1/500 s) y una resolución de 1280x1024 px. La orientación y el zoom de la cámara fueron tales que la imagen resultante es coplanar con todos los movimientos relevantes. Los marcadores de alto contraste se pegaron al piso para seguir el movimiento de los GDL 1 y 2, mientras que los marcadores invariantes a la rotación se pegaron a al volante de inercia para seguir la rotación. Hay que tener en cuenta que, en general, el volante gira y se desplaza simultáneamente, por lo que los inclinómetros clásicos basados en la gravedad no son adecuados.

Organiza:

Se implementó seguimiento de objetos en un software ad-hoc desarrollado por los autores y disponible en https://github.com/carloshernangarrido/object_tracking. El software realiza primero el seguimiento de objetos con resolución de píxeles enteros que se basa en la coincidencia de plantillas. En especial, el elemento máximo de la matriz de coeficientes de correlación normalizados da la fila y la columna del objetivo (mejor coincidencia) en cada instante de tiempo. A continuación, los resultados se refinan a resolución de subpíxel mediante el centro de masa aplicado a la matriz de coeficientes de correlación normalizados en una ventana rectangular centrada en su máximo, también en cada instante de tiempo. Por último, un filtro de Kalman en el dominio del tiempo del tipo Rauch-Tung-Striebel, que utiliza un modelo de señal de velocidad constante, suaviza la señal subpíxel. La cuantificación en píxeles enteros corresponde a 0.25 mm, por lo que la resolución real del conjunto cámara-software es bastante mejor que esa cifra.

El método descrito anteriormente permitió medir los GDLs 1 y 2. Para medir el ángulo de rotación del volante de inercia, se aplicó el mismo método a cuatro marcadores invariantes a la rotación, que definen cuatro puntos a seguir. Una vez obtenidas las posiciones horizontal y vertical ($x_i(t), y_i(t)$) del punto i -ésimo (de los cuatro puntos) para cada instante de tiempo t , se estimó el ángulo de rotación a partir del ajuste de transformaciones 2D afines parciales de 4 coeficientes indeterminados.

Caso	Radio de los bloques de plomo	Inertancia (kg)			Frecuencias naturales
		Bloques de plomo	Carcasa de plástico	Total	
1	0.0963	41.10	62.25	103.35	1.64, 2.82
2	0.0963	41.10	62.25	103.35	1.64, 2.82
3	0.0863	33.01	62.25	95.26	1.72, 2.86
4	0.0863	33.01	62.25	95.26	1.72, 2.86
5	0.0763	25.80	62.25	88.05	1.79, 2.93
6	0.0763	25.80	62.25	88.05	1.79, 2.89
7	0.0663	19.48	62.25	81.73	1.86, 2.97
8	0.0663	19.48	62.25	81.73	1.86, 2.97
9	0.0563	14.05	62.25	76.30	1.90, 3.04
10	0.0563	14.05	62.25	76.30	1.90, 3.04
11	--	0.00	0.00	0.00	2.32, 6.29
12	--	0.00	0.00	0.00	2.32, 6.29

Tabla 1 - Ensayos de vibración libre.

Para los ensayos de vibración libre se consideraron un total de 14 casos, cuyos 12 primeros se muestran en la Tabla 1 con las frecuencias naturales amortiguadas identificadas experimentalmente. Los 10 primeros casos correspondieron al inerte

Organiza:

conectado a la estructura y al amortiguador de fricción desconectado. Los casos consistieron en variaciones del radio asociado a los bloques de plomo, contabilizando 5 posiciones, y 2 ensayos para cada posición para comprobar la repetibilidad. Los datos de inercia de estos casos se estimaron en función de la geometría y los materiales del volante, la posición radial de los bloques de plomo y la relación de transmisión. Por otro lado, los casos 11 y 12 correspondieron al inerter y al amortiguador de fricción ambos desconectados; y tuvieron por objeto identificar la influencia de la inercia en la estructura a controlar.

Los casos 13 y 14, que no figuran en la Tabla 1, son similares a los casos de prueba 11 y 12, pero el amortiguador de fricción y el inerter están desconectados. Estos casos sólo tienen por objeto caracterizar la estructura que se va a controlar.

En todos los ensayos de vibración libre, las condiciones iniciales que iniciaron las vibraciones fueron: (i) un desplazamiento de aproximadamente 0.02 m impuesto al GDL 1 (GDL 2 libre) mediante un cable, y (ii) velocidad cero en ambos GDLs. El cable se soltó repentinamente, iniciando así las oscilaciones libres.

Caracterización de la estructura

La caracterización de la estructura a controlar se realizó ajuste de equilibrio dinámico, y los datos obtenidos según se describe en la subsección anterior. En primer lugar, se obtuvo el vector de desplazamientos $x_s(t)$ correspondiente a los casos 13 y 14 a partir de los registros de vídeo y la versión suavizada de la técnica de seguimiento de objetos. A continuación, el vector de velocidades $\dot{x}_s(t)$ y el vector de aceleraciones $\ddot{x}_s(t)$ se obtuvieron numéricamente a partir de $x_s(t)$.

Esas respuestas estructurales, y las Ecs. (2-4) con $f_s(t) = 0$, $m_1 = 32.37$ kg, $m_2 = 26.01$ kg, y $b_{12} = 0$ kg, permitieron construir un par de ecuaciones de equilibrio dinámico para cada instante de tiempo. Los parámetros $k_{01} = k_{01s}$, $k_{12} = k_{12s}$, $c_{01} = c_{01}$, $c_{12} = c_{12s}$ quedaron como parámetros a determinar mediante la pseudoinversa, tal y como se propone en^{20,21}. Los parámetros estructurales estimados resultantes fueron los siguientes: $k_{01} = 14188$ N/m, $k_{12s} = 19904$ N/m, y $\beta_d = 0.0021 \text{ s} \pm 0.0001 \text{ s}$; donde este último valida la hipótesis de amortiguamiento de Rayleigh proporcional a la rigidez. Los coeficientes de amortiguamiento modal correspondientes son del 1% para el primer modo de vibración y del 4% para el segundo.

Análisis modal experimental

Las Figs. 3(a) y (b) muestran la magnitud del espectro de frecuencias de la respuesta a la deformación de cada subestructura durante la vibración libre, para diferentes valores de inercia. La primera observación es que los pares de curvas correspondientes al mismo valor de inercia son prácticamente coincidentes; lo que significa que la estructura a controlar y el inerter construido tienen una repetibilidad aceptable, por lo que no hay evidencia de daño. Las curvas azul oscuro corresponden a la estructura con el inerter montado pero desconectado. En estos casos, los picos

Organiza:

de resonancia están bien separados, como era de esperar para una estructura tipo cadena casi uniforme (con subestructuras de rigidez y masa similares). Cuando se conecta el inerter (obsérvese que las masas y la rigidez reales permanecen invariables), ambos picos de resonancia disminuyen en frecuencia. Los casos 13 y 14 no se muestran en las figuras (a) y (b), ya que las frecuencias naturales cambian no sólo debido a la inertancia, sino también debido a las masas parásitas del inerter y el amortiguador. Sin embargo, cabe destacar que el pico de alta frecuencia cambia más que el pico de baja frecuencia. Este importante efecto inducido por el inerter ha sido estudiado detalladamente en ²² bajo el nombre de *acoplamiento modal*; y es la razón por la que la energía de vibración de la subestructura inferior puede ser disipada finalmente en la subestructura superior.

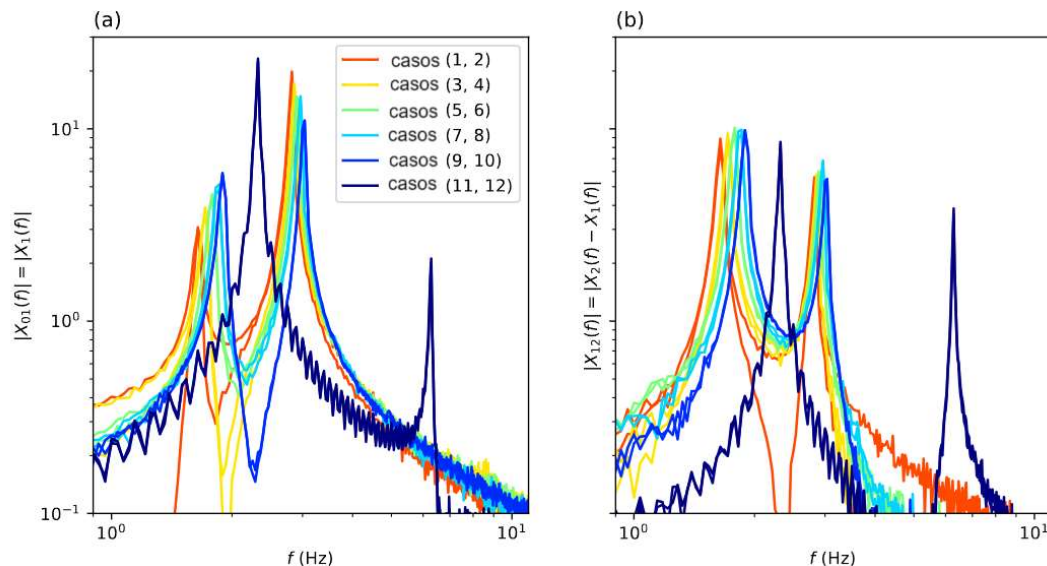


Figura 3. *Transformadas de Fourier de las respuestas del sistema con y sin el inerter, obtenidas en vibraciones libres. Referencias: (a) subestructura inferior, (b) subestructura superior.*

También puede observarse en la Fig. 3(a) que cuando aumenta la inertancia (casos 10 a 1 en orden inverso), aumenta la amplitud del pico de alta frecuencia y disminuye la del pico de baja frecuencia. Esto es debido a que las formas de los modos de vibración cambian con la inertancia, como se muestra en la Fig. 4(a), y también su participación en la respuesta debido al cambio en sus correlaciones con el vector de condiciones iniciales $[0 \ 0.02 \ 0.02]^T$. La inertancia óptima, en el sentido de H infinito, corresponde a ambos picos con la misma amplitud. Sin embargo, debe recordarse que las amplitudes relativas de estos picos dependen de la participación modal en la respuesta, que a su vez depende de las condiciones iniciales que iniciaron las vibraciones libres. En el caso de las vibraciones forzadas, las amplitudes relativas dependen del contenido frecuencial y de la distribución espacial de las fuerzas sobre la estructura. Por esta razón, la respuesta del sistema a un caso de vibración forzada

Organiza:

no puede optimizarse mediante ensayos de vibración libre; al menos de forma directa.

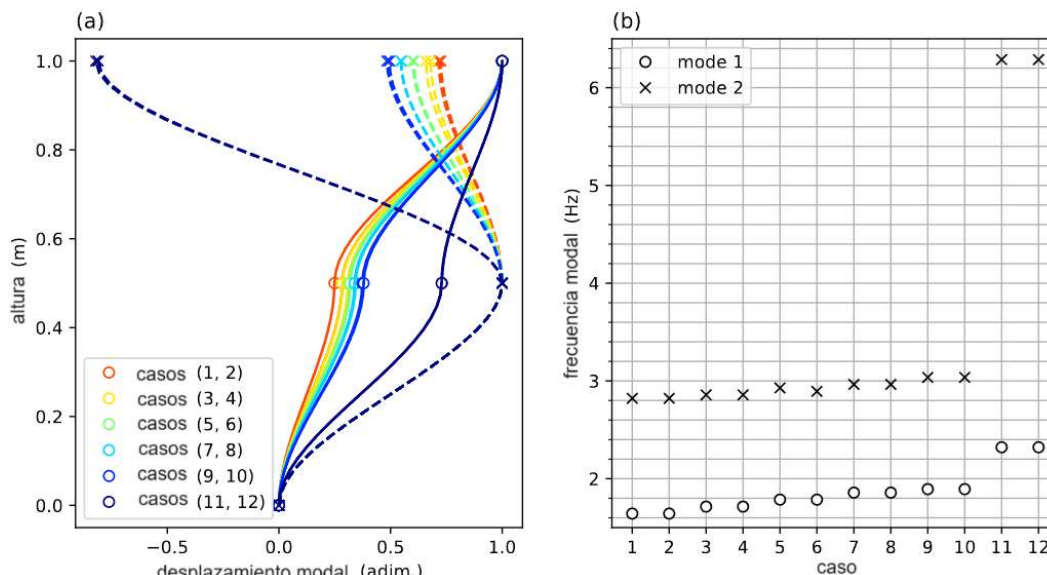


Figura 4. Resultados del análisis modal experimental del sistema en vibraciones libres con y sin inerter. Las curvas continuas corresponden al primer modo de vibración, y las curvas discontinuas al segundo modo de vibración. Referencias: (a) formas de los modos de vibración, (b) frecuencias naturales amortiguadas.

A partir de los picos de magnitud de los espectros de frecuencia correspondientes a los DOF 1 y 2, se construyeron las formas de los modos de vibración que se muestran en la Fig. 4(a). Es interesante el hecho de que la forma del primer modo de vibración (curvas sólidas) cambia ligeramente cuando la inercia está presente (comparar los casos 11 y 12 con el resto), pero la forma del segundo modo de vibración (curvas discontinuas) cambia drásticamente. El inerter hace que ambas formas de los modos de vibración tengan el mismo signo en ambos DOF. Esta es una visión alternativa del fenómeno de *acoplamiento modal* estudiado en ¹⁷. En particular, la presencia del inerter altera los modos de vibración de la estructura, haciendo que se vuelvan no ortogonales. Por lo tanto, los métodos de superposición de modos para el análisis numérico deben aplicarse con cuidado a estos casos.

Por último, la Fig. 4(b) muestra las frecuencias naturales amortiguadas correspondientes a los picos de resonancia y las formas de los modos de vibración. Una vez más, la repetibilidad es muy buena, excepto quizás entre los casos 5 y 6. En general, la primera frecuencia natural es más repetible que la segunda. En cuanto al acoplamiento de modos, los saltos de frecuencia entre los casos 10 y 11 constituyen otra prueba clara de ello.

Organiza:

ENSAYOS DE EXCITACIÓN DE BASE

El AMEI tiene dos parámetros de ajuste: la inercia ($b_{12} = b_{12add}$) y el coeficiente de amortiguamiento (c_{12add}). El primero se optimizó siguiendo el procedimiento analítico-numérico detallado en ¹⁷; que asume una estructura intrínsecamente no amortiguada. El resultado fue una inercia de 72.83 kg (ver sección 5 en ¹⁷). Por lo tanto, en los experimentos, la inercia se fijó en el mínimo permitido; es decir, 76.3 kg. Esta desviación no es muy problemática, ya que Warburton⁷ demostró que, para un AMS, mayores relaciones de amortiguamiento estructural inherente conducen a menores relaciones de frecuencia de sintonización. Por lo tanto, la inercia óptima para una estructura ligeramente amortiguada (con la misma masa y rigidez) debe ser ligeramente superior a 72.83 kg. El amortiguamiento, por su parte, no puede optimizarse como en ¹⁷ porque el amortiguador en el montaje descrito es friccional mientras que la referencia citada asume un amortiguador viscoso lineal. Por lo tanto, el amortiguador friccional se optimizó empíricamente de la siguiente manera. Cabe señalar que, debido a la dependencia del amortiguamiento equivalente de los amortiguadores de fricción con la amplitud de desplazamiento, esta optimización es estrictamente válida para la amplitud de excitación con la que se realizó. En la práctica, la optimización debería realizarse con la amplitud de excitación más desfavorable, seguida de un análisis de sensibilidad, ambos sobre una base estadística.

Se generó artificialmente un registro de desplazamiento de barrido en frecuencia para la excitación de base con los siguientes parámetros: duración efectiva: 200 s; frecuencia inicial: 1 Hz; frecuencia final: 8 Hz; aceleración pico: 0.25 m/s²; forma: aceleración con amplitud constante; método: doble integración de registro de aceleración y corrección de base. El registro de desplazamiento generado se reprodujo mediante una mesa vibratoria 2000E de 6 DOF (modelo 170-131) de MOOG (véase la Fig. 1(a)).

A diferencia de los ensayos de vibración libre, para estos ensayos de excitación de base, la respuesta se midió utilizando tres sensores láser de desplazamiento. Se utilizaron dos sensores optoNCDT1607-200 de MICRO-EPSILON para medir los desplazamientos $x_{01}(t)$ y $x_{02}(t)$ correspondientes a los DOF 1 y 2 con respecto al suelo. Además, se utilizó un sensor optoNCDT 1402 - 600SC (también de MICRO-EPSILON) para medir el desplazamiento de la mesa vibratoria $x_0(t)$ (DOF 0) con respecto al suelo.

El procedimiento para la optimización empírica consistió en una serie de 20 ensayos de excitación de base que se resumen en la Fig. 5. Todos los casos tuvieron el mismo registro de excitación de entrada, y los datos de salida de cada caso fueron los picos positivos y negativos de la respuesta $x_{01}(t)$. Estos picos se identifican con los marcadores + y o en la Fig. 5. Además, los ensayos se agrupan por pares, ya que se realizaron dos ensayos en cada situación para comprobar su repetibilidad. Las abscisas de la Fig. 5(a, b) son el nivel de amortiguamiento dado por el número de vueltas dadas a la rueda de ajuste que regula la fuerza normal en el amortiguador de fricción. El nivel de amortiguamiento de referencia 1.0 vueltas corresponde al contacto

Organiza:

inicial de las zapatas de fricción. Por lo tanto, el nivel de amortiguamiento 0.0 vueltas asegura que no haya contacto entre las zapatas de fricción y, por tanto, que la fuerza de fricción sea 0.0 N (equivalente a $c_{12add} = 0 \text{ Ns/m}$).

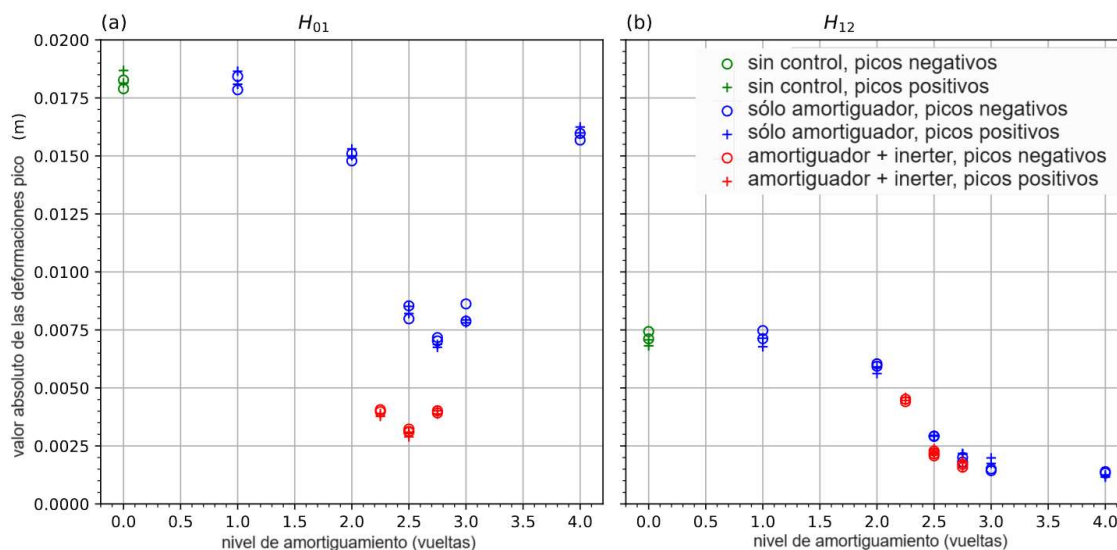


Figura 5. Resumen de ensayos de excitación de base para la optimización empírica. Referencias: (a) subestructura inferior, (b) subestructura superior.

El primer par de ensayos de excitación de la base consistió en desconectar el inerte y el amortiguador de fricción. Estos casos se identifican por el color verde en la Fig. 5 y representan la línea de base *sin control*. Los picos resultaron entre 0.0175 y 0.02 m, con un valor medio de 0.0183 m.

Los siguientes 6 pares de ensayos de excitación de base, que se identifican por el color azul en la Fig. 5, estaban destinados a optimizar el caso de referencia denominado *sólo amortiguador*. Por lo tanto, el inerte estaba desconectado, pero la fuerza de fricción era diferente de 0.0 N. Los tres primeros pares de casos correspondían en realidad a niveles de amortiguamiento de 1.0, 2.0 y 3.0 vueltas. A continuación, siguiendo un esquema de bisección, se ensayaron los pares de casos correspondientes a 2.5 y 2.75 vueltas; alcanzando el amortiguamiento óptimo para la resolución práctica alcanzable con el amortiguador de fricción y su rueda. Por último, se probó el par de casos correspondiente a 4.0 vueltas, sólo por completitud. La reducción de respuesta obtenida fue del 62% (de 0.0183 a 0.0070 m). Esta reducción de la respuesta del 62% hallada experimentalmente es un competidor justo para el concepto de AMEI bajo estudio.

Los 3 últimos pares de ensayos de excitación de la base, que se identifican con el color rojo en la Fig. 5, tenían por objeto optimizar el AMEI. En esta ocasión, se conectaron tanto el amortiguador de fricción como el inerte. El primero de estos pares correspondió a 2.75 vueltas de la rueda del amortiguador de fricción. El siguiente

Organiza:

correspondió a 2.25 vueltas, resultando casi el mismo pico de respuesta (0.0040 m). Siguiendo de nuevo un esquema de bisección, el siguiente par de casos correspondió a 2.5 vueltas. Esta vez, el pico de respuesta fue inferior (0.003 m); y esto se consideró AMEI *óptimo* para la resolución de amortiguamiento y el rango de ajuste de inercia disponibles (Fig. 5(a)). La reducción de la respuesta conseguida fue del 83% (de 0.0183 a 0.003 m).

La optimización empírica descrita hasta ahora resultó ciertamente práctica y fácil de realizar en el laboratorio. Sin embargo, se basa en la fuerte suposición de que la mesa vibratoria reproduce el registro de entrada con buena fidelidad, o al menos con buena repetibilidad. Esto último no es totalmente cierto, ya que la interacción entre la mesa vibratoria y el sistema ensayado cambia a medida que lo hacen los parámetros del sistema. Para que la estimación de la norma infinito sea independiente de la variabilidad de la excitación, se estimó la FRF para todos los ensayos de excitación de base utilizando la información de excitación-respuesta. En particular, las FRF se estimaron utilizando el análisis espectral de doble canal.

La Fig. 6 muestra la magnitud de las FRF estimadas para 7 de los 10 pares de ensayos de excitación de base: (i) *sin control* (curvas sólidas verdes), (ii) *sólo amortiguador* para 3 niveles de amortiguamiento (curvas azules), y (iii) AMEI también para 3 niveles de amortiguamiento (curvas rojas). Para evaluar la consistencia numérico-experimental, las predicciones numéricas del modelo matemático de la segunda sección se muestran en la Fig. 6(a, b) como curva verde oscura delgada (caso *sin control*) y curva roja oscura delgada (con parámetros optimizados numéricamente teniendo en cuenta el amortiguamiento estructural inherente, es decir, $b_{12} = 75.0$ kg y $c_{12add} = 710.4$ Ns/m). La coincidencia aproximada entre los resultados numéricos y experimentales valida el modelo matemático propuesto para ambos casos: sin control y controlado. De la Fig. 6(a), se desprende que el caso *sin control* presenta la mayor respuesta, y que los tres niveles de amortiguamiento mostrados para el AMEI presentan picos más bajos que los mostrados para el caso de referencia *sólo amortiguador*.

En las curvas azules correspondientes a la referencia *sólo amortiguador*, el nivel de amortiguamiento de 2.75 vueltas presentó el pico más bajo para la subestructura inferior ($\|H_{01}\|_{\infty} = 0.04$ s² en la Fig. 6(a)). Sin embargo, no presentó la respuesta más baja para la subestructura superior (Fig. 6(b)), lo que era de esperar. La estimación de su norma H infinito dio como resultado $\|H_{01}\|_{\infty} = 0.01$ s². Estas dos mediciones confirman que la referencia *sólo amortiguador* es óptima a pesar de la interacción con la mesa vibratoria. Por lo tanto, este caso es un competidor justo para el AMEI bajo estudio.

En las curvas rojas correspondientes a la A, el nivel de amortiguamiento de 2.5 vueltas presentó el pico más bajo para la subestructura inferior ($\|H_{01}\|_{\infty} = 0.015$ s² en la Fig. 6(a)). Por lo tanto, el nivel de amortiguamiento de 2.5 vueltas es óptimo a pesar de la interacción con la mesa vibratoria. En este caso, la respuesta de la subestructura superior también resultó subóptima como puede verse en la Fig. 6(b); donde $\|H_{01}\|_{\infty} = 0.01$ s² para el nivel de amortiguamiento de 2.5 vueltas, y $\|H_{01}\|_{\infty} = 0.008$ s² para 2.75

Organiza:

vueltas. La predicción numérica presenta una respuesta más simétrica y ligeramente inferior, lo que puede deberse a la utilización de una inercia de 76.3 kg en lugar de 75.0 kg. Lo más importante aquí es que las normas H infinito halladas experimentalmente concuerdan con las predicciones numéricas; y, por tanto, son confiables. Puede decirse finalmente que la mejora que ofreció el AMEI frente a su justo competidor de referencia *sólo amortiguador* fue una reducción de la respuesta del 62% (de 0.04 a 0.015 s²), y esto se ha comprobado numérica y experimentalmente.

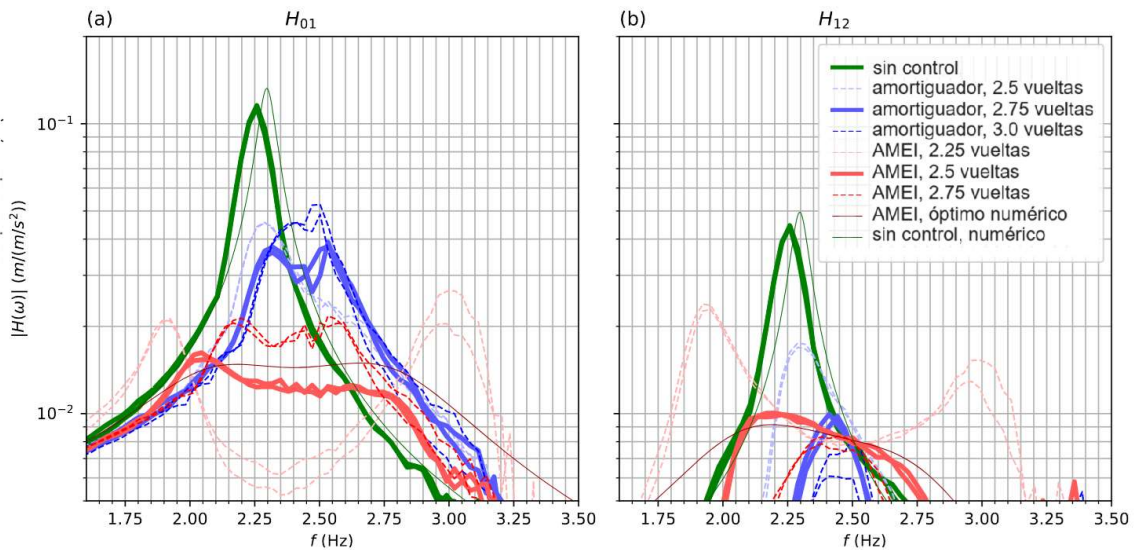


Figura 6. Magnitudes obtenidas experimentalmente y calculadas numéricamente de las funciones de respuesta en frecuencia del sistema. Referencias: (a) subestructura inferior, (b) subestructura superior.

Las diferencias entre los resultados numéricos y experimentales para el AMEI óptimo que pueden verse en la Fig. 6(b) se explican a continuación. Es bien conocido que el coeficiente de amortiguamiento equivalente de un amortiguador de fricción seca viene dado por ⁵:

$$c_{eq} = \frac{4F}{\pi\omega X_{12}}; \quad (8)$$

donde F es el valor absoluto de la fuerza de fricción, ω es la frecuencia a la que se estima el amortiguamiento equivalente, y X_{12} es la amplitud de desplazamiento de las oscilaciones. Dado que la optimización empírica se realizó en el sentido de la norma H infinito, el coeficiente de amortiguamiento equivalente c_{eq} del amortiguador de fricción es igual al coeficiente de amortiguamiento viscoso lineal óptimo dentro de la resonancia. Fuera de resonancia, X_{12} disminuye mucho más rápido que lo que ω aumenta o disminuye. Por lo tanto, c_{eq} aumenta, haciendo que la deformación de la subestructura superior esté más amortiguada en los ensayos experimentales que en las simulaciones numéricas. Para frecuencias por encima de la resonancia, ω

Organiza:

aumenta; lo que hace que el incremento de c_{eq} debido al decremento de X_{12} sea menos pronunciado.

Análisis de las fuerzas

La Fig. 7 muestra la magnitud de las FRFs de las fuerzas en distintos elementos del sistema. La primera observación es que las fuerzas estructurales disipativas (curvas roja sólida y discontinua) son inferiores en más de un orden de magnitud a las fuerzas elásticas. Por otra parte, las fuerzas estructurales elásticas y disipativas se reducen más de 5 veces en resonancia debido al AMEI. Dado que la subestructura inferior no tiene intervención, el uso del AMEI también reduce más de 5 veces el corte en la base (Fig. 7(a)).

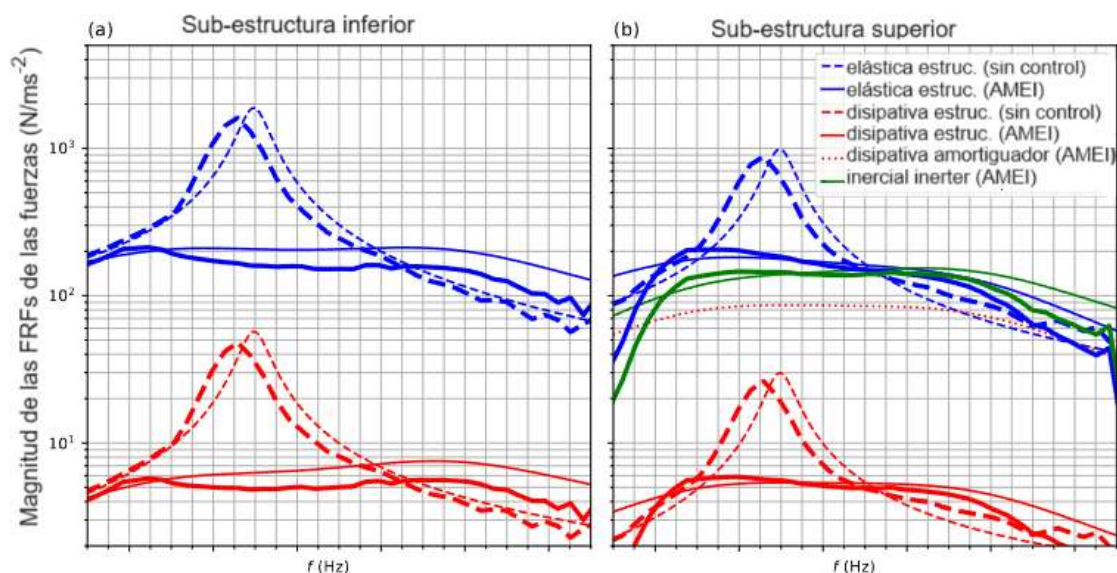


Figura 7. Magnitud de las funciones de respuesta en frecuencia de las fuerzas.
Referencias: Las curvas finas corresponden a simulaciones numéricas, y las curvas gruesas a pruebas experimentales. Las curvas azules corresponden a las fuerzas elásticas, las rojas a las de disipación y las verdes a las inerciales. Las curvas discontinuas corresponden al caso *sin control*, mientras que las sólidas y punteadas al AMEI optimizado.

En la Fig. 7(b), también puede observarse que, en resonancia, la fuerza a través del amortiguador (curva roja punteada) es aproximadamente la mitad de la que atraviesa las columnas cuando el AMEI está funcionando. Aunque los detalles de las uniones deben diseñarse cuidadosamente, se espera que una subestructura superior que pueda soportar las fuerzas elásticas del caso *sin control* también pueda soportar las fuerzas del amortiguador. La Fig. 7(b) sólo muestra la curva roja punteada para las simulaciones numéricas, ya que el amortiguador es lineal en ellas. Si la

Organiza:

implementación del amortiguador fuera también lineal viscoso, las fuerzas experimentales serían similares a las predichas numéricamente. En una implementación experimental como la considerada en este trabajo, donde el amortiguador es friccional, se espera que las fuerzas pico sean incluso menores (para un amortiguamiento equivalente), ya que la forma de onda de la fuerza es rectangular en lugar de sinusoidal.

CONCLUSIONES

El presente trabajo profundizó en el estudio del AMEI, incluyendo la consideración de amortiguamiento estructural inherente y un programa experimental que validó las conclusiones teóricas del presente estudio y de los anteriores. El estudio de aplicación se mejoró con un diseño detallado del inerter que utiliza un innovador mecanismo flexible.

Las principales conclusiones del presente trabajo son las siguientes. El inerter puede implementarse utilizando un mecanismo de contacto-rodamiento para la conversión traslacional-rotacional. Esto permite una gran carrera (varias vueltas en el eje del volante) con holgura y fricción insignificantes. El amortiguador puede implementarse como friccional, alcanzando un rendimiento muy similar al predicho numéricamente con un amortiguador viscoso lineal (cuando ambos son óptimos). El programa experimental demostró que una metodología de sintonización eficaz consiste en los siguientes pasos: (1) Determinación de las masas a partir de las propiedades de los materiales, la geometría y/o mediciones directas. (2) Identificación de las matrices de rigidez y amortiguamiento de la estructura mediante ecuaciones de equilibrio dinámico y mediciones de desplazamiento en vibraciones libres. (3) Optimización de la inertancia y el amortiguamiento (viscoso lineal) siguiendo la referencia ¹⁷. (4) Ajuste de la inertancia óptima en el inerter real. (5) Búsqueda del amortiguamiento de fricción óptimo por el método de bisección, mediante experimentos.

El uso de un amortiguador de fricción, en lugar de uno viscoso lineal, tiene el inconveniente de la optimalidad dependiente de la excitación. Sin embargo, tiene la ventaja de una menor deformación de la subestructura superior fuera de la resonancia, lo que reduce la norma H 2 de las respuestas en la subestructura superior. Por último, un análisis de fuerzas basado en las FRF de fuerza mostró que las fuerzas de amortiguamiento e inercia del AMEI optimizado son mucho menores que las fuerzas elásticas estructurales del caso sin control.

El AMEI se mostró muy prometedor como solución eficaz y práctica para el control de vibraciones, en particular para la rehabilitación de estructuras existentes con restricciones funcionales y/o arquitectónicas en la subestructura inferior. Las futuras investigaciones sobre el concepto de diseño del AMEI deberían abordar la subestructuración óptima en estructuras con más de 2 DOF, así como las ventajas y limitaciones en regímenes no lineales.

Organiza:

Agradecimientos

Se agradece enormemente la ayuda de los ingenieros José Morán y Gabriel Houri en el montaje del dispositivo experimental. Los autores también desean agradecer al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Universidad Nacional de Cuyo (UNCuyo) por el apoyo financiero.

Referencias

1. Preumont, A. & Seto, K. *Active Control of Structures*. (John Wiley & Sons, 2008).
2. Soong, T. T. & Dargush, G. F. *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*. John Wiley Sons (John Wiley & Sons, 1997).
3. Kourakis, I. Structural systems and tuned mass dampers of super-tall buildings: case study of Taipei 101. (Massachusetts Institute of Technology, 2007).
4. Frahm, H. Device for Damping Vibrations of Bodies. (1911).
5. Den Hartog, J. P. *Mechanical Vibrations*. (Dover Publications, Inc., 1985).
6. Brock, J. E. A Note on the Damped Vibration Absorber. *J. Appl. Mech.* **13**, A284–A284 (1946).
7. Warburton, G. B. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **10**, 381–401 (1982).
8. Chang, C. C. Mass dampers and their optimal designs for building vibration control. *Eng. Struct.* **21**, 454–463 (1999).
9. Domizio, M., Ambrosini, D. & Curadelli, O. Experimental and numerical analysis to collapse of a framed structure subjected to seismic loading. *Eng. Struct.* **82**, 22–32 (2015).
10. Feng, M. Q. & Mita, A. Vibration Control of Tall Buildings Using Mega SubConfiguration. *J. Eng. Mech.* **121**, 1082–1088 (1995).
11. Ziyaeifar, M. & Noguchi, H. Partial mass isolation in tall buildings. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **27**, 49–65 (1998).
12. Kidokoro, R. Self Mass Damper (SMD): Seismic Control System Inspired by the Pendulum Movement of an Antique Clock. *14th World Conf. Earthq. Eng.* (2008).
13. Wang, S.-J., Chang, K.-C., Hwang, J.-S. & Lee, B.-H. Simplified analysis of mid-story seismically isolated buildings. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **40**, 119–133 (2011).
14. Lin, J.-L. Top-story mass dampers for seismic control of the first triplet of vibration modes of two-way asymmetric-plan buildings. *J. Vib. Control* **23**, 2962–2976 (2017).

Organiza:

15. Wang, S. J., Lee, B. H., Chuang, W. C., Chiu, I. C. & Chang, K. C. Building mass damper design based on optimum dynamic response control approach. *Eng. Struct.* **187**, 85–100 (2019).
16. Clough, R. W. & Penzien, J. *Dynamics of structures*. (Computers & Structures, Inc., 1995).
17. Garrido, H., Domizio, M., Curadelli, O. & Ambrosini, D. On the vibration control through mode coupling in a near-uniform chain-like structure using an inerter. *J. Vib. Control* 1–12 (2023) doi:10.1177/10775463231187457.
18. Smith, M. C. Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **47**, 1648–1662 (2002).
19. Ma, R., Bi, K. & Hao, H. Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review. *Eng. Struct.* **243**, 112655 (2021).
20. Garrido, H. & Curadelli, O. Damage detection through bilinear stiffness estimation in multi-degree-of-freedom frame structures. *Int. J. Lifecycle Perform. Eng.* **1**, 380–397 (2014).
21. Mohammad, K. S., Worden, K. & Tomlinson, G. R. DIRECT PARAMETER ESTIMATION FOR LINEAR AND NON-LINEAR STRUCTURES. *J. Sound Vib.* **152**, 471–499 (1992).
22. Garrido, H., Codina, R., de Borbón, F. & Ambrosini, D. Damage identification in beams using burst video-records during free-vibration. *Mech. Syst. Signal Process.* **200**, (2023).

Organiza: