

UN ELEMENTO FINITO SIMPLIFICADO PARA ANÁLISIS DE VIGAS IMPERFECTAS

⁽¹⁾Dr. Ing. Jouglaard, Claudio e ⁽²⁾Ing. Civil Perez, Ana Liza

⁽¹⁾Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Buenos Aires. UTN.

⁽²⁾Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional General Pacheco. UTN.

⁽¹⁾claudio.jouglaard@frba.utn.edu.ar y ⁽²⁾analizaperez1@gmail.com

RESUMEN

Las normativas más modernas para el cálculo de estructuras de acero, como la ANSI/AISC o el EUROCODE o el nuevo CIRSOC, prescriben que para estructuras esbeltas es necesario llevar en cuenta el efecto de imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría para el cálculo de las resistencias requeridas de sus miembros. La mayoría de los programas comerciales modelan la geometría imperfecta simplemente desplazando los nodos de la malla de elementos finitos. Esto puede requerir una gran cantidad de elementos rectos o planos, en especial para cáscaras.

El análisis de vigas imperfectas a priori exigiría utilizar alguna teoría de deformación específica para elementos curvos y además apta para análisis no lineal geométrico. En este trabajo demostraremos, que, si las imperfecciones son pequeñas, es posible deducir las matrices de análisis no lineal de vigas imperfectas llevando en cuenta las imperfecciones a partir de la energía de deformación corrotacional de un elemento perfecto lineal sin necesidad de recurrir a ninguna teoría específica de vigas curvas.

ABSTRACT

The most modern standards for the calculation of steel structures, such as ANSI/AISC or EUROCODE or the new CIRSOC, prescribe that for slender structures it is necessary to consider the effect of imperfections or small deviations in geometry for the calculation of the required resistances of its members. Most commercial programs model imperfect geometry by simply shifting the nodes of the finite element mesh. This can require many straight or plane elements, especially for shells.

The analysis of imperfect beams a priori would require using some specific deformation theory for curved elements and suitable for nonlinear geometric analysis. In this work we will demonstrate that, if the imperfections are small, it is possible to deduce the nonlinear analysis matrices of imperfect beams considering the imperfections from the corotational deformation energy of a perfect linear element without needing to resort to any specific theory of curved beams.

Organiza:

INTRODUCCIÓN

El acero es un material ampliamente utilizado en la construcción de estructuras, gracias a su capacidad para permitir el diseño de estructuras esbeltas que pueden cubrir grandes distancias con una mínima cantidad de material. Sin embargo, esta ventaja conlleva un desafío inherente: la inestabilidad estructural¹.

A medida que la estructura se carga de manera incremental, llega un punto en el que se alcanza la llamada carga crítica o de pandeo. En este momento, la estructura se vuelve inestable y cambia bruscamente de configuración, pasando a un estado de grandes deformaciones. Estas deformaciones pueden conducir a la falla estructural, ya sea porque el material ha alcanzado los límites de su capacidad resistente o porque las deformaciones son de tal magnitud que dejan a la estructura fuera de servicio.

En general, este fenómeno no se presenta de manera repentina al llegar a la carga de pandeo, sino que aparece de manera gradual. Esto se debe a la presencia inevitable de las imperfecciones geométricas que provocan un incremento de las deformaciones desde el inicio de la carga^{1,2,3}.

En la figura 1 podemos observar una columna ideal perfectamente vertical a la izquierda y su modo de pandeo, asociado al comportamiento poscrítico, es decir, para cargas mayores que la crítica. En el centro tenemos una columna real que presenta pequeñas imperfecciones geométricas y, por lo tanto, presenta deformaciones laterales desde el inicio de la carga. Finalmente, a la derecha tenemos un diagrama de carga-desplazamiento donde se aprecia que el comportamiento real de la estructura imperfecta, que es asintótico al de la estructura perfecta, presenta desplazamientos laterales desde el inicio y son estas deformaciones las que dan el estado tensional real presente en la estructura.

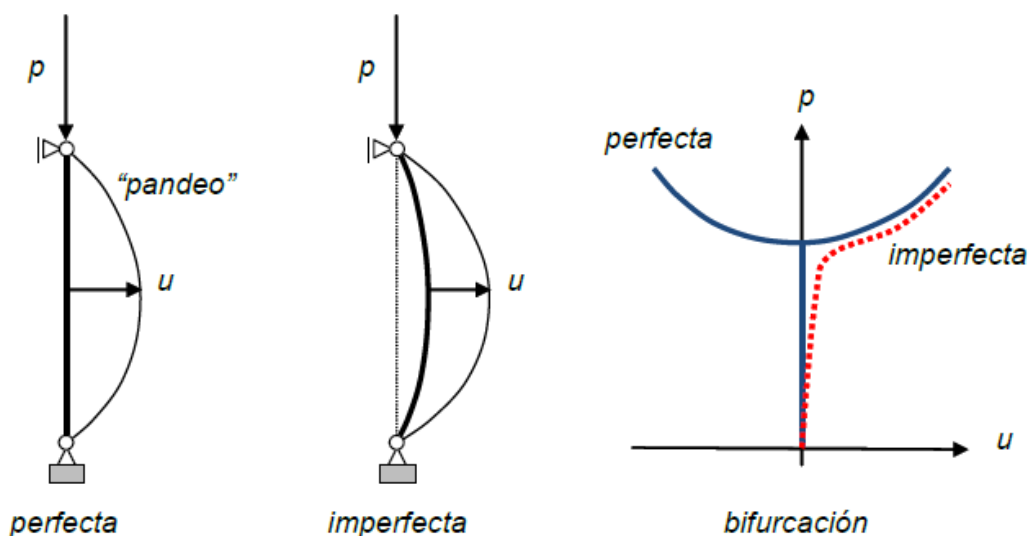


Figura 1. Comportamiento de estructuras imperfectas.

Organiza:

Luego, en el diseño y análisis de estructuras, es crucial considerar el efecto de las pequeñas imperfecciones geométricas en el comportamiento estructural. Estas desviaciones de la configuración ideal o "perfecta" pueden tener un impacto significativo en la estabilidad y resistencia de la estructura.

Las normas de diseño más recientes, como el AISC⁴, EUROCODE⁵ y el CIRSOC⁶ en nuestro país, han incorporado la posibilidad de modelar directamente estas imperfecciones para la verificación de la estabilidad de estructuras metálicas. Esto ha permitido reemplazar los análisis clásicos basados en longitudes de pandeo y factores de mayoración.

Sin embargo, los modelos numéricos comúnmente utilizados, como los de elementos finitos, aún presentan limitaciones en la representación de estas imperfecciones. Por lo general, se recurre a la simple reubicación de los nodos de la estructura perfecta, lo que resulta en una representación ineficiente que requiere una gran cantidad de subdivisiones para definir adecuadamente la imperfección (Fig. 2).

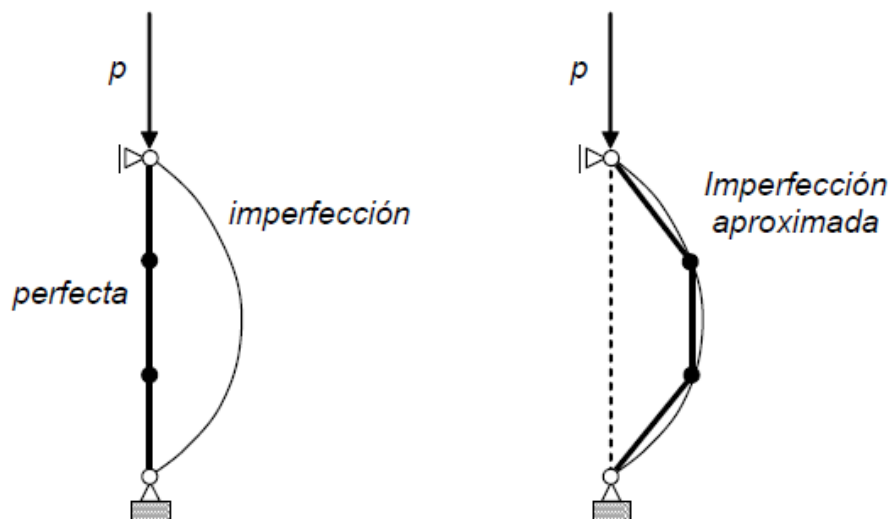


Figura 2. Aproximación de estructuras imperfectas.

En consecuencia, es necesario desarrollar enfoques más eficientes y precisos para la modelización de las imperfecciones geométricas en el análisis estructural. Esto permitirá una evaluación más realista del comportamiento de las estructuras, lo que a su vez redundará en un diseño más seguro y optimizado.

El objetivo de este trabajo es la presentación de una matriz de rigidez tangente apta para el análisis no lineal de estructuras de vigas imperfectas y que contemple la geometría de las imperfecciones en su formulación. Será utilizada una formulación corrotacional para la deducción de la energía de deformación que simplifica el tratamiento no lineal geométrico.

Organiza:

IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL

Para calcular las deformaciones y esfuerzos de la estructura imperfecta debemos calcular los desplazamientos nodales d_i resolviendo las ecuaciones de equilibrio no lineal:

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{d}) \mathbf{d} = \lambda \mathbf{p} \quad (1)$$

donde $\mathbf{K}_s(\mathbf{d})$ es la matriz de rigidez secante, cuyos coeficientes son funciones de los desplazamientos en el caso no lineal. El vector $\mathbf{p}$ es el vector de cargas externas de referencia de magnitud fija y λ es el factor de cargas variable. Se asume que todas las cargas son proporcionales en magnitud al factor λ que se incrementa en pasos $\Delta\lambda$ hasta alcanzar el equilibrio en el nivel deseado mediante la siguiente ecuación incremental:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) \Delta\mathbf{d} = \Delta\lambda \mathbf{p} \quad (2)$$

donde $\mathbf{K}(\mathbf{d})$ es la matriz de rigidez tangente en una configuración equilibrada definida por los desplazamientos $\mathbf{d}$.

Para verificar que se ha alcanzado el equilibrio se debe cumplir

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}) = \lambda \mathbf{p} \quad (3)$$

donde el vector $\mathbf{f}(\mathbf{d})$ representa las fuerzas internas y el lado derecho las fuerzas externas.

Luego para encontrar la solución de desplazamientos $\mathbf{d}$ es necesario conocer el vector de fuerzas internas $\mathbf{f}(\mathbf{d})$ y la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}(\mathbf{d})$ en una configuración definida por los desplazamientos $\mathbf{d}$.

FORMULACIÓN CORROTACIONAL PARA VIGAS PERFECTAS

Una formulación corrotacional considera al estado deformado de un componente estructural como producido por la superposición de un movimiento de cuerpo rígido más una deformación^{7,8,9}.

Sea un elemento finito de viga de longitud L y consideremos tres configuraciones para este elemento: 1) una configuración **inicial indeformada**, 2) una configuración **final deformada** y 3) una configuración de **referencia corrotada**. En la figura 3 podemos ver estas configuraciones.

Organiza:

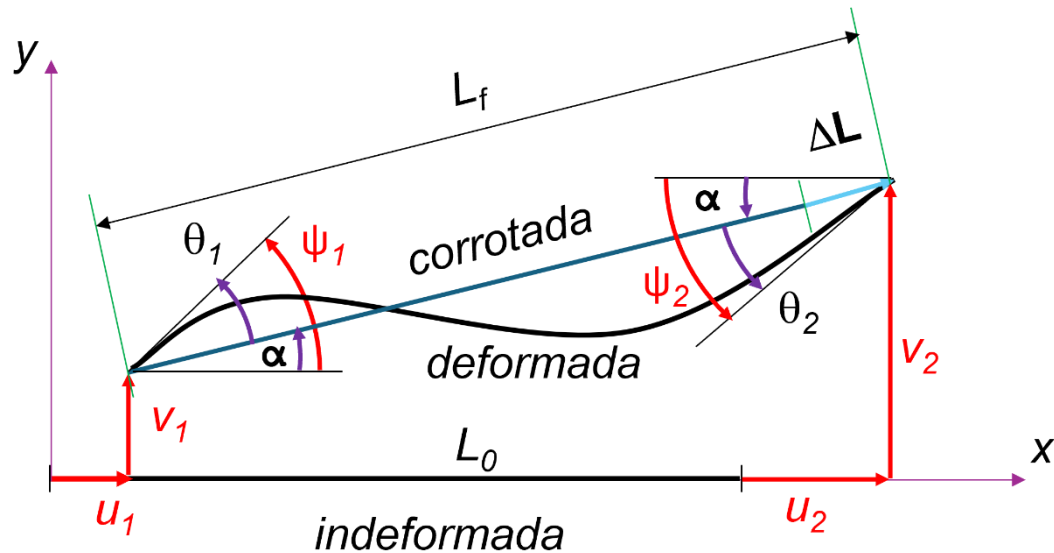


Figura 3. Configuraciones de la formulación corrotacional.

La configuración inicial *indeformada* corresponde al estado libre de tensiones y cargas. La configuración final *deformada* corresponde al estado equilibrado y la configuración *corrotada* es una configuración auxiliar para calcular las deformaciones.

La configuración corrotada se define de manera tal de acompañar al elemento en sus movimientos de cuerpo rígido y a una distancia pequeña de la configuración deformada (rigurosamente en el límite cuando la longitud del elemento tienda a ser infinitesimal ambas configuraciones deben coincidir).

No hay una definición única de la configuración corrotada, en nuestro caso adoptamos el eje de dicha configuración en coincidencia con la recta que une los puntos extremos de la viga deformada, como se hace usualmente^{7,9}.

La ventaja de la formulación corrotacional es que si las deformaciones son pequeñas se pueden plantear las deformaciones respecto de la configuración corrotada de manera similar a como se hace en la teoría clásica de vigas.

Energía de deformación para estructuras perfectas

La energía de deformación U de la viga, considerando deformaciones infinitesimales, material elástico y las hipótesis usuales de mantenimiento de las secciones planas, se puede obtener a partir de la matriz de rigidez local como¹⁰:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_L \mathbf{a} \quad (4)$$

donde la matriz de rigidez local $\mathbf{K}_L$ es¹⁰:

Organiza:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & 4\frac{EI}{L_0} & 2\frac{EI}{L_0} \\ 0 & 2\frac{EI}{L_0} & 4\frac{EI}{L_0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

siendo E el módulo de elasticidad, A e I son el área y el momento de inercia de la sección transversal de la viga y L_0 es la longitud inicial de la viga indeformada.

Además, $\mathbf{a}$ es el vector de variables locales definido como

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

donde ΔL es el estiramiento de la barra y θ_1, θ_2 son los giros de flexión medidos desde la configuración corrotada (ver figura 3).

En forma explícita la energía de deformación se puede expresar como

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA}{L_0} (\Delta L)^2 + \frac{2EI}{L_0} (\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2) \quad (7)$$

donde el primer término corresponde a la energía de deformación axial y el segundo a la energía de deformación de flexión⁹.

Relación entre desplazamientos locales y globales

La viga es llevada a la configuración deformada mediante la aplicación de desplazamientos y rotaciones globales de los nodos de la configuración inicial indeformada, que son u_1, v_1, ψ_1 para el primer nodo y u_2, v_2, ψ_2 para el segundo.

Podemos considerar a estas variables como las variables independientes o grados de libertad del problema que son conocidas como coordenadas generalizadas. Luego debemos hallar la relación entre las variables locales y las globales.

El estiramiento ΔL de la barra es

$$\Delta L = L_f - L_0 = \frac{(L_f - L_0)(L_f + L_0)}{L_f + L_0} = \frac{L_f^2 - L_0^2}{L_f + L_0} \quad (8)$$

Asumiendo que las deformaciones sean pequeñas tenemos $L_f \approx L_0$ y podemos aproximar el estiramiento como

Organiza:

$$\Delta L \approx \frac{L_f^2 - L_0^2}{2L_0} \quad (9)$$

Por Pitágoras tenemos

$$\begin{aligned} L_f^2 &= (L_0 + u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 \\ &= L_0^2 + 2L_0(u_2 - u_1) + (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Sustituyendo L_f^2 en ΔL resulta

$$\Delta L \approx (u_2 - u_1) + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2L_0} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{2L_0} \quad (11)$$

Luego debemos vincular las variables locales θ_1, θ_2 con las coordenadas generalizadas u_i, v_i, ψ_i vinculadas a cada nodo de la viga. Asumiendo que los giros locales sean muy pequeños, tenemos:

$$\theta_1 \approx \text{sen}\theta_1 = \text{sen}(\psi_1 - \alpha) = \text{sen}\psi_1 \cos\alpha - \cos\psi_1 \text{sen}\alpha \quad (12)$$

$$\theta_2 \approx \text{sen}\theta_2 = \text{sen}(\psi_2 - \alpha) = \text{sen}\psi_2 \cos\alpha - \cos\psi_2 \text{sen}\alpha$$

Con

$$\begin{aligned} \text{sen}\alpha &= \frac{v_2 - v_1}{L_f} \approx \frac{v_2 - v_1}{L_0} \\ \cos\alpha &= \frac{L_0 + u_2 - u_1}{L_f} \approx \frac{L_0 + u_2 - u_1}{L_0} = 1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0} \end{aligned} \quad (13)$$

Luego las variables locales a_i agrupadas en el vector $\mathbf{a}$ se puede expresar como:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u_2 - u_1) + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2L_0} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{2L_0} \\ \text{sen}\psi_1 \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0} \right) - \cos\psi_1 \left(\frac{v_2 - v_1}{L_0} \right) \\ \text{sen}\psi_2 \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0} \right) - \cos\psi_2 \left(\frac{v_2 - v_1}{L_0} \right) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Los desplazamientos globales se pueden agrupar en un vector $\mathbf{d}$ como:

$$\mathbf{d} = \{d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6\}^T = \{u_1 \ v_1 \ \psi_1 \ u_2 \ v_2 \ \psi_2\}^T \quad (15)$$

Luego, la energía de deformación será una función compuesta $U(\mathbf{a}(\mathbf{d}))$ de los desplazamientos globales d_i , los cuales no aparecen explícitamente en la energía de deformación.

Organiza:

Vector de fuerzas internas para estructuras perfectas

El vector de fuerzas internas $\mathbf{f}$ viene dado por las derivadas de la energía de deformación respecto de los desplazamientos generalizados globales $\mathbf{d}$ de los nodos de la estructura⁷.

Usando la regla de la cadena la componente f_i es

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial d_i} = \frac{\partial U}{\partial a_p} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \quad (16)$$

Donde hemos aplicado la convención de suma sobre índices repetidos, esto es, se deben sumar los términos que contienen el índice repetido sobre todo el rango del índice. En nuestro caso, el índice p varía entre 1 y m , donde m es la cantidad de variables locales, o sea $m = 3$, por lo tanto, componente f_i resulta

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial d_i} = \frac{\partial U}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial d_i} + \frac{\partial U}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial d_i} + \frac{\partial U}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial d_i} \quad (17)$$

Las derivadas de la energía de deformación U respecto de las variables locales a_p son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_1} &= \frac{\partial U}{\partial \Delta L} = \frac{EA}{L} \Delta L = N \\ \frac{\partial U}{\partial a_2} &= \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{EI}{L} (4\theta_1 + 2\theta_2) = M_1 \\ \frac{\partial U}{\partial a_3} &= \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \frac{EI}{L} (4\theta_2 + 2\theta_1) = M_2 \end{aligned} \quad (18)$$

Donde N es el esfuerzo axial y M_1, M_2 son los momentos flectores en los extremos de la viga. Estos esfuerzos los podemos almacenar en un vector $\mathbf{S}$ como:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Además, las derivadas de las variables locales a_p respecto de las coordenadas generalizadas d_i son seis por cada variable local.

Para las derivadas de $a_1 = \Delta L$ tenemos

Organiza:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_1}{\partial d_1} = \frac{\partial \Delta L}{\partial u_1} &= -1 - \frac{(u_2 - u_1)}{L_0} & \frac{\partial a_1}{\partial d_4} = \frac{\partial \Delta L}{\partial u_2} &= 1 + \frac{(u_2 - u_1)}{L_0} \\
 \frac{\partial a_1}{\partial d_2} = \frac{\partial \Delta L}{\partial v_1} &= -\frac{(v_2 - v_1)}{L_0} & \frac{\partial a_1}{\partial d_5} = \frac{\partial \Delta L}{\partial v_2} &= \frac{(v_2 - v_1)}{L_0} \\
 \frac{\partial a_1}{\partial d_3} = \frac{\partial \Delta L}{\partial \psi_1} &= 0 & \frac{\partial a_1}{\partial d_6} = \frac{\partial \Delta L}{\partial \psi_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Para las derivadas de $a_2 = \theta_1$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_2}{\partial d_1} = \frac{\partial \theta_1}{\partial u_1} &= -\frac{\text{sen}\psi_1}{L_0} & \frac{\partial a_2}{\partial d_4} = \frac{\partial \theta_1}{\partial u_2} &= \frac{\text{sen}\psi_1}{L_0} \\
 \frac{\partial a_2}{\partial d_2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v_1} &= \frac{\text{cos}\psi_1}{L_0} & \frac{\partial a_2}{\partial d_5} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v_2} &= -\frac{\text{cos}\psi_1}{L_0} \\
 \frac{\partial a_2}{\partial d_3} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi_1} &= \text{cos}\psi_1 \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) + \text{sen}\psi_1 \left(\frac{v_2 - v_1}{L_0}\right) & \frac{\partial a_2}{\partial d_6} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

Y para las derivadas de θ_2 tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_3}{\partial d_1} = \frac{\partial \theta_2}{\partial u_1} &= -\frac{\text{sen}\psi_2}{L_0} & \frac{\partial a_3}{\partial d_4} = \frac{\partial \theta_2}{\partial u_2} &= \frac{\text{sen}\psi_2}{L_0} \\
 \frac{\partial a_3}{\partial d_2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial v_1} &= \frac{\text{cos}\psi_2}{L_0} & \frac{\partial a_3}{\partial d_5} = \frac{\partial \theta_2}{\partial v_2} &= -\frac{\text{cos}\psi_2}{L_0} \\
 \frac{\partial a_3}{\partial d_3} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_1} &= 0 & \frac{\partial a_3}{\partial d_6} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_2} &= \text{cos}\psi_2 \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) + \text{sen}\psi_2 \left(\frac{v_2 - v_1}{L_0}\right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Estas derivadas las podemos guardar en una matriz de transformación **T** como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta L}{\partial u_1} & \frac{\partial \Delta L}{\partial v_1} & \frac{\partial \Delta L}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \Delta L}{\partial u_2} & \frac{\partial \Delta L}{\partial v_2} & \frac{\partial \Delta L}{\partial \psi_2} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial v_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi_2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial v_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial v_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi_2} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Luego, con las derivadas calculadas podemos obtener el vector de fuerzas internas en función de las coordenadas generalizadas como

Organiza:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^T \mathbf{S} \quad (24)$$

Matriz de rigidez tangente para estructuras perfectas

Las componentes k_{ij} de la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ vienen dadas por las derivadas segundas de la energía potencial respecto de las coordenadas generalizadas d_i . Usando la regla de la cadena la componente k_{ij} es

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{\partial^2 U}{\partial d_i \partial d_j} = \frac{\partial}{\partial d_j} \left(\frac{\partial U}{\partial d_i} \right) = \frac{\partial}{\partial d_j} \left(\frac{\partial U}{\partial a_p} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial a_p \partial a_q} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \frac{\partial a_q}{\partial d_j} + \frac{\partial U}{\partial a_p} \frac{\partial^2 a_p}{\partial d_i \partial d_j} \end{aligned} \quad (25)$$

Notemos que podemos expresar a la matriz de rigidez tangente como la suma de dos matrices^{7,8,9}

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_{TG} \quad (26)$$

donde $\mathbf{K}_m$ es la matriz de rigidez *material* y $\mathbf{K}_{TG}$ es la matriz de rigidez *tangente geométrica*.

Los elementos km_{ij} de la matriz de rigidez material vienen dados por el primer término de la ec.(25)

$$km_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial a_p \partial a_q} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \frac{\partial a_q}{\partial d_j} \quad (27)$$

y Los elementos ktg_{ij} de la matriz de rigidez tangente geométrica vienen dados por el segundo término de la ec.(25)

$$ktg_{ij} = \frac{\partial U}{\partial a_p} \frac{\partial^2 a_p}{\partial d_i \partial d_j} \quad (28)$$

Donde las únicas derivadas segundas no nulas de la energía de deformación U respecto de las variables locales a_p son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial a_1^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta L^2} = \frac{EA}{L_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_2 \partial a_3} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 2 \frac{EI}{L_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_2^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = 4 \frac{EI}{L_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_2^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = 4 \frac{EI}{L_0} \end{aligned} \quad (29)$$

Organiza:

Notemos que estos son los coeficientes de rigidez locales de la matriz $\mathbf{K}_L$ en la ec.(5). Con estas derivadas calculadas podemos obtener la matriz de rigidez material como:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} \quad (30)$$

Luego, las únicas derivadas segundas no nulas de $a_1 = \Delta L$ son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_1}{\partial d_1^2} &= \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial u_1^2} = \frac{1}{L_0} & \frac{\partial^2 a_1}{\partial d_2^2} &= \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial v_1^2} = \frac{1}{L_0} \\ \frac{\partial^2 a_1}{\partial d_1 \partial d_4} &= \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{1}{L_0} & \frac{\partial^2 a_1}{\partial d_2 \partial d_5} &= \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial v_1 \partial v_2} = -\frac{1}{L_0} \\ \frac{\partial^2 a_1}{\partial d_4^2} &= \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial u_2^2} = \frac{1}{L_0} & \frac{\partial^2 a_1}{\partial d_5^2} &= \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial v_2^2} = \frac{1}{L_0} \end{aligned} \quad (31)$$

Para $a_2 = \theta_1$ las únicas derivadas segundas no nulas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_2}{\partial d_1 \partial d_3} &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u_1 \partial \psi_1} = -\frac{\cos \psi_1}{L_0} & \frac{\partial^2 a_2}{\partial d_2 \partial d_3} &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_1 \partial \psi_1} = -\frac{\sen \psi_1}{L_0} \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial d_4 \partial d_3} &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u_2 \partial \psi_1} = \frac{\cos \psi_1}{L_0} & \frac{\partial^2 a_2}{\partial d_5 \partial d_3} &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_2 \partial \psi_1} = \frac{\sen \psi_1}{L_0} \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial d_3^2} &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \psi_1^2} = -\sen \psi_1 \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0} \right) + \cos \psi_1 \left(\frac{v_2 - v_1}{L_0} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Para $a_3 = \theta_2$ las únicas derivadas segundas no nulas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_3}{\partial d_1 \partial d_6} &= \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial u_1 \partial \psi_2} = -\frac{\cos \psi_2}{L_0} & \frac{\partial^2 a_3}{\partial d_2 \partial d_6} &= \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial v_1 \partial \psi_2} = -\frac{\sen \psi_2}{L_0} \\ \frac{\partial^2 a_3}{\partial d_4 \partial d_6} &= \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial u_2 \partial \psi_2} = \frac{\cos \psi_2}{L_0} & \frac{\partial^2 a_3}{\partial d_5 \partial d_6} &= \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial v_2 \partial \psi_2} = \frac{\sen \psi_2}{L_0} \\ \frac{\partial^2 a_3}{\partial d_6^2} &= \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \psi_2^2} = -\sen \psi_2 \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0} \right) + \cos \psi_2 \left(\frac{v_2 - v_1}{L_0} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Organiza:

Agrupando las derivadas segundas calculadas para cada variable local a_p en una matriz a_{pdd} de 6 x 6 de componentes $a_{p_{ij}}$ como

$$a_{p_{ij}} = \frac{\partial^2 a_p}{\partial d_i \partial d_j} \quad (34)$$

Luego podemos obtener la matriz de rigidez tangente geométrica $\mathbf{K}_{TG}$ como:

$$\mathbf{K}_{TG} = N a_{1dd} + M_1 a_{2dd} + M_2 a_{3dd} \quad (35)$$

donde N, M_1, M_2 vienen dados en la ec.(18) y las matrices $a_{1dd}, a_{2dd}, a_{3dd}$ son:

$$a_{1dd} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$a_{2dd} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c\psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s\psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\psi_1 & c\psi_1 & s\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & c\psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s\psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$a_{3dd} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c\psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s\psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c\psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s\psi_2 \\ -c\psi_2 & -s\psi_2 & 0 & c\psi_2 & s\psi_2 & c\psi_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde

$$\begin{aligned} c\psi_1 &= \cos\psi_1 & s\psi_1 &= \sin\psi_1 & c\psi_1 &= -s\psi_1(L_0 + u_2 - u_1) + c\psi_1(v_2 - v_1) \\ c\psi_2 &= \cos\psi_2 & s\psi_2 &= \sin\psi_2 & c\psi_2 &= -s\psi_2(L_0 + u_2 - u_1) + c\psi_2(v_2 - v_1) \end{aligned} \quad (39)$$

Organiza:

Notemos que todas las matrices a_{pdd} son simétricas y por lo tanto la matriz $\mathbf{K}_{TG}$ también lo es. Podemos imaginar a esta matriz como llevando en cuenta los efectos de segundo orden de los esfuerzos internos.

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN PARA LA ESTRUCTURA IMPERFECTA

Consideremos que la viga presenta imperfecciones que pueden ser modeladas por las mismas funciones de forma utilizadas para la deformada, en particular, utilizaremos rotaciones $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ para definir la configuración imperfecta (ver figura 4).

Esta formulación usualmente se conoce como *isoparamétrica*¹⁰ y para el cálculo de la energía de deformación se toma como referencia para las integrales a la configuración inicial imperfecta. Esto trae aparejado una serie de dificultades para integrar sobre regiones curvas.

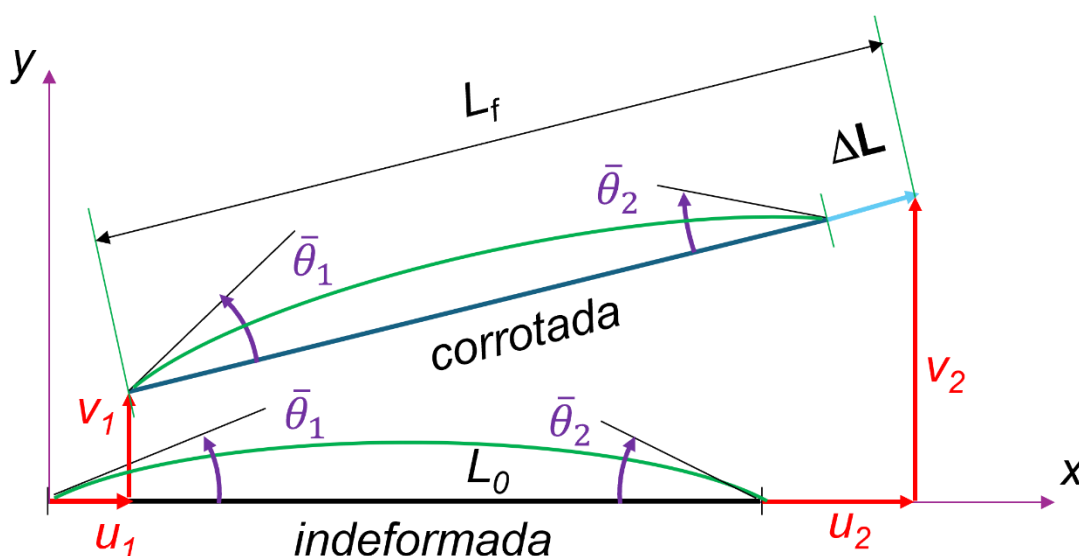


Figura 4. Formulación corrotacional imperfecta.

En nuestro caso asumiremos que las imperfecciones son muy pequeñas y que por lo tanto las integrales se pueden efectuar sobre la configuración de referencia corrotada de la viga. Nótese que hemos adoptado que los nodos extremos siempre estén sobre la configuración imperfecta.

Además, por adoptar a los desplazamientos que provocan deformación como isoparamétricos entonces se pueden definir por variables nodales b_i agrupadas en un vector $\mathbf{b}$ como

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}} \quad (40)$$

siendo $\bar{\mathbf{a}}$ los desplazamientos nodales de imperfección

Organiza:

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Luego es posible asumir que la energía de deformación es similar a la de la estructura perfecta, aunque modificando los desplazamientos efectivos de deformación, esto es

$$\bar{U}(\mathbf{b}) = \bar{U}(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) \quad (42)$$

En forma explícita

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L_0} (\Delta L)^2 + \frac{2EI}{L_0} [(\theta_1 - \bar{\theta}_1)^2 + (\theta_1 - \bar{\theta}_1)(\theta_2 - \bar{\theta}_2) + (\theta_2 - \bar{\theta}_2)^2] \quad (43)$$

Donde con una barra superior indicamos cantidades referidas a la configuración imperfecta y nos referiremos a esta energía como la energía de deformación imperfecta.

Vector de fuerzas internas para estructuras imperfectas

Para la estructura imperfecta el vector de fuerzas internas $\bar{\mathbf{f}}$ viene dado por las derivadas de la energía de deformación imperfecta respecto de los desplazamientos generalizados globales $\mathbf{d}$ de los nodos de la estructura.

Usando la regla de la cadena la componente $\bar{f}_i$ es

$$\bar{f}_i = \frac{\partial \bar{U}}{\partial d_i} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial a_p} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \quad (44)$$

Las derivadas de la energía de deformación imperfecta $\bar{U}$ respecto de las variables locales a_p son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial a_1} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \Delta L} = \frac{EA}{L} \Delta L = N \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial a_2} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_1} = \frac{EI}{L} [4(\theta_1 - \bar{\theta}_1) + 2(\theta_2 - \bar{\theta}_2)] = \bar{M}_1 \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial a_3} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_2} = \frac{EI}{L} [4(\theta_2 - \bar{\theta}_2) + 2(\theta_1 - \bar{\theta}_1)] = \bar{M}_2 \end{aligned} \quad (45)$$

Donde N es el esfuerzo axil y $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ son los momentos flectores en los extremos de la viga imperfecta. Estos esfuerzos los podemos almacenar en un vector $\bar{\mathbf{S}}$ como:

Organiza:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} N \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Por otro lado, notemos que las coordenadas locales $\Delta L, \theta_1, \theta_2$ mantienen la misma definición que para el caso perfecto (o sea, se miden desde la configuración corrotada) y por lo tanto sus derivadas parciales respecto de las coordenadas generalizadas d_i no varían.

Luego, la matriz de transformación $\mathbf{T}$, en la ec.(23), no varía y podemos expresar de manera matricial al vector de fuerzas internas imperfectas $\bar{\mathbf{f}}$ como:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{S}} \quad (47)$$

Matriz de rigidez tangente para estructuras imperfectas

Las componentes k_{ij} de la matriz de rigidez tangente $\bar{\mathbf{K}}$ de la estructura imperfecta vienen dadas por las derivadas segundas de la energía de deformación imperfecta respecto de las coordenadas generalizadas d_i . Usando la regla de la cadena la componente k_{ij} es

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial d_i \partial d_j} = \frac{\partial}{\partial d_j} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial d_i} \right) = \frac{\partial}{\partial d_j} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial a_p} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial a_p \partial a_q} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \frac{\partial a_q}{\partial d_j} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial a_p} \frac{\partial^2 a_p}{\partial d_i \partial d_j} \end{aligned} \quad (48)$$

Notemos que podemos expresar a la matriz de rigidez tangente imperfecta como la suma de dos matrices

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_m + \bar{\mathbf{K}}_{TG} \quad (49)$$

donde $\bar{\mathbf{K}}_m$ es la matriz de rigidez *material imperfecta* y $\bar{\mathbf{K}}_{TG}$ es la matriz de rigidez *tangente geométrica imperfecta*.

Los elementos $\bar{k}m_{ij}$ de la matriz de rigidez material imperfecta vienen dados por el primer término de la ec.(48)

$$\bar{k}m_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial a_p \partial a_q} \frac{\partial a_p}{\partial d_i} \frac{\partial a_q}{\partial d_j} \quad (50)$$

Organiza:

y los elementos $\bar{k}t g_{ij}$ de la matriz de rigidez tangente geométrica imperfecta vienen dados por el segundo término de la ec.(48)

$$\bar{k}t g_{ij} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial a_p} \frac{\partial^2 a_p}{\partial d_i \partial d_j} \quad (51)$$

Las derivadas segundas de la energía de deformación imperfecta $\bar{U}$ respecto de las variables locales a_p son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial a_1^2} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \Delta L^2} = \frac{EA}{L_0} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial a_2 \partial a_3} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 2 \frac{EI}{L_0} \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial a_2^2} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = 4 \frac{EI}{L_0} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial a_2^2} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = 4 \frac{EI}{L_0} \end{aligned} \quad (52)$$

Notemos que estas derivadas son iguales a las de la estructura perfecta y se pueden representar por la misma matriz $\mathbf{K}_L$ en la ec.(5).

Luego, la matriz de rigidez material imperfecta se puede expresar como:

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}_m = \mathbf{K}_m = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}} \quad (53)$$

Por lo tanto, coincide con la la matriz de rigidez material de la estructura perfecta.

Además, las derivadas primeras y segundas de las variables locales a_i . respecto de las coordenadas generalizadas d_i no cambian en la estructura imperfecta y podemos obtener la matriz de rigidez tangente geométrica imperfecta $\bar{\mathbf{K}}_{TG}$ como:

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}_{TG} = N a_{1dd} + \bar{M}_1 a_{2dd} + \bar{M}_2 a_{3dd}} \quad (54)$$

donde la única diferencia respecto de la estructura perfecta son las expresiones de los esfuerzos $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ que se obtienen de las ecs.(45).

CONCLUSIONES

La formulación corrotacional presentada permite el análisis de estructuras de vigas imperfectas sin necesidad de recurrir a ninguna teoría específica para vigas curvas. Debemos resaltar que para estructuras perfectas la formulación corrotacional que sirve de base ha mostrado muy buenos resultados^{7,8,9} y es dable esperar que la extensión a estructura imperfectas continúe esta tendencia.

Destacamos que las modificaciones a introducir son válidas para cualquier forma de imperfección y se pueden aplicar en los programas actuales introduciendo mínimos cambios.

Organiza:

REFERENCIAS

1. Ziemian R.D., (2010), *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 6°Ed., John Wiley, New York.
2. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1973), *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London.
3. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1984), *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley, London.
4. ANSI/AISC 360-16, Specification for structural steel buildings, American Institute of Steel Construction, Chicago, USA, (2019).
5. EUROCODE 3, Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, European Committee for Standardization (CEN), Brussels, (2009)
6. CIRSOC 301, Reglamento Argentino de Estructuras de Acero para Edificios, INTI-CIRSOC, (2018).
7. Urthaler Y. y Reddy J.N., (2005), A corotational finite element formulation for the analysis of planar beams, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21(10):553-570.
8. Crisfield M.A. y Motta G.F., (1996), A Unified Co-Rotational Framework for Solids, Shells and Beams, *International Journal for Solids and Structures*, 33(20-22):2969-2992.
9. Matias W.T. y Mendes L., (2009), Uma abordagem unificada da formulação co-rotacional para elementos de treliça 2D, treliça 3D e viga 2D, (2005), *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 25(2):163-190.
10. Oñate E., (2013), *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*, Springer Science & Business Media.
11. Toledo J.A., (2021), *Metodología para el Análisis No Lineal Geométrico de Estructuras de Barras con Imperfecciones*, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires.

Organiza: