

RESORTES DE WINKLER PARA ESTRUCTURAS LONGITUDINALES ENTERRADAS SOMETIDAS A ONDAS DE CORTE

Soffiatti, Franco P.; Turello, Diego F.; Pinto, Federico

Dr. en Ciencias de la Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (UNC),
IDIT (UNC-CONICET). fpsoffiatti@unc.edu.ar

Dr. en Ciencias de la Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (UNC),
IDIT (UNC-CONICET). diego.turello@unc.edu.ar

Dr. en Ciencias de la Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (UNC),
IDIT (UNC-CONICET). fpinto@unc.edu.ar

RESUMEN

Las ondas de corte que se propagan a través del suelo imponen deformaciones que deben tenerse en cuenta en el diseño y verificación de estructuras longitudinales enterradas como túneles o pilotes. Las soluciones utilizadas en la práctica se basan en la teoría de viga de Euler-Bernoulli apoyada sobre fundación de Winkler. El principal inconveniente de este enfoque es que no permite capturar las distorsiones inducidas en la estructura cuando es sometida a ondas S, ni permite incluir la fricción generada en la interfaz con el medio. Para superar estas limitaciones, en el presente trabajo se propone una solución analítica considerando una viga de Timoshenko embebida en un medio elástico continuo tridimensional. De esta formulación se derivan soluciones analíticas simplificadas para la obtención de resortes transversales y rotacionales equivalentes, aplicables al modelo de Winkler. Los resortes propuestos, a su vez, generalizan los modelos existentes en la literatura, superando sus principales inconvenientes. Los resultados obtenidos se comparan con las obtenidas con otros resortes de la literatura y se muestran las principales tendencias observadas.

ABSTRACT

Shear waves propagating through the ground impose deformations that must be taken into account in the design and verification of longitudinal buried structures such as tunnels or piles. The solutions used in practice are based on the Euler-Bernoulli beam theory supported by a Winkler foundation. The main drawback of this approach is that it does not capture the distortions induced in the structure when subjected to S-waves, nor does it account for the friction generated at the interface with the medium. To overcome these limitations, this paper proposes an analytical solution considering a Timoshenko beam embedded in a three-dimensional continuous elastic medium. From this formulation, simplified analytical solutions are derived for obtaining equivalent transverse and rotational springs, applicable to the Winkler model. The proposed springs, in turn, generalize existing models in the literature, overcoming their main drawbacks. The results obtained are compared with other springs in the literature, and the main observed trends are discussed.

Introducción

El presente trabajo aborda la necesidad de evaluar las demandas cinemáticas impuestas por ondas de corte que se propagan a lo largo de estructuras longitudinales subterráneas (por ejemplo, túneles, tuberías, pilotes), y cómo estas difieren de los movimientos en campo libre debido a la interacción suelo-estructura (Mylonakis y Gazetas, 2002¹). Las teorías convencionales consideran la propagación de ondas planas en un medio elástico infinito, homogéneo e isotrópico, por ejemplo, (Pinto et al., 2015²; Anoyatis y Lemnitzer, 2017³). Dichos movimientos implican típicamente el desarrollo de desplazamientos transversales y rotación de la sección de la estructura (e.g., Beredugo y Novak, 1972⁴). Las demandas estructurales resultantes generalmente se evalúan mediante métodos analíticos simplificados, que permiten establecer aproximaciones básicas. Estos métodos tienen la ventaja de ofrecer soluciones en forma cerrada, facilitando la identificación de los parámetros claves. Estas soluciones analíticas simplificadas son útiles para validar e interpretar métodos numéricos más sofisticados, como se expone en (Guha et al., 2016⁵; Kramer, 1996⁶).

Las soluciones analíticas generalmente se basan en aproximaciones de vigas esbeltas sobre fundaciones elásticas, utilizando resortes distribuidos del tipo Winkler (1867)⁷, como se ve, por ejemplo, en Selvadurai (1985)⁸, St. John y Zharah (1987)⁹, Zheng et al. (2024)¹⁰. La estructura, modelada como una viga, suele seguir la teoría clásica de Euler-Bernoulli, que solo considera deformaciones por flexión y no permite capturar las distorsiones inducidas por el corte, que pueden ser particularmente importantes si las ondas S son un componente dominante del movimiento sísmico (Wu et al., 2018¹¹). Otro aspecto que no se representa adecuadamente en este enfoque es el hecho de que la sección transversal de la estructura no puede rotar libremente debido a su contacto con el suelo, siendo necesario un resorte rotacional para modelar estas restricciones, como se discute en Soffietti y Pinto (2022)¹². Para superar estas limitaciones, Yin (2000)¹³ y Sánchez-Merino et al. (2009)¹⁴, propusieron un modelo de viga Timoshenko sobre fundación de Winkler, pero solo considerando resortes transversales para modelar las reacciones del suelo. Recientemente, Soffietti y Pinto (2022)¹² presentaron un modelo analítico de una viga Timoshenko sobre una fundación Winkler, con resortes tanto transversales como rotacionales, sujetos a ondas S. Un parámetro fundamental en este enfoque simplificado, es la definición del valor de los resortes. Tal es así, que numerosas publicaciones se han realizado en las últimas décadas para evaluar valores adecuados para análisis estáticos y dinámicos, como se muestra en Anoyatis y Lemnitzer (2017)³.

Los resortes de Winkler se han propuesto para problemas de interacción lateral en tuberías, por ejemplo, Matsubara y Hoshiya (2000)¹⁵ y Selvadurai (1985)⁸; vigas y pilotes, por ejemplo, Dobry et al. (1982)¹⁶, Kavvadas y Gazetas (1993)¹⁷, Mylonakis (2001)¹⁸, Anoyatis y Lemnitzer (2017)³, Novak y Nogami (1977)¹⁹; túneles, por ejemplo, St. John y Zahrah (1987)⁹, y para problemas de deformación plana, por ejemplo, Novak et al. (1978)²⁰. Respecto a los resortes rotacionales dinámicos, la principal investigación es la desarrollada por Novak et al (1978)²⁰, donde se aborda el problema de deformación plana. Para el caso estático e incluyendo las tensiones friccionales, Li et al. (2023)²¹ y Soffietti et al. (2024)²² propusieron un desarrollo basado en la interacción entre el medio y una viga de Timoshenko y presentaron resortes rotacionales aplicables a estructuras longitudinales.

Los modelos de deformación plana generalmente asumen que la masa tridimensional del suelo se puede considerar como capas infinitesimales individuales que se extienden hasta el infinito en dirección horizontal, y se ignora la transferencia de corte entre estas capas. Dado que los modelos de deformación plana ignoran la variación de los desplazamientos transversales a lo largo de la coordenada longitudinal, no pueden capturar la rigidez a bajas frecuencias, como se muestra en Soffietti et al. (2024)²² y, por lo tanto, no son directamente aplicables para análisis pseudoestáticos.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar soluciones analíticas para determinar resortes transversales y rotacionales utilizables para la evaluación de estructuras longitudinales subterráneas sujetas a ondas de corte. Las fórmulas propuestas se comparan con soluciones de referencia de la literatura y se validan mediante un modelo de elementos finitos tridimensional completo ya publicado en la literatura (Zheng et al., 2024¹⁰).

Definición del Problema

El problema tratado en este artículo se representa esquemáticamente en la Figura 1. Una única estructura longitudinal está embebida en un medio homogéneo y seminfinito. El medio está sujeto a una onda de corte propagada axialmente con una frecuencia armónica ω , definiendo el patrón de desplazamiento en campo libre, que se aplica a la estructura a través de resortes transversales (k_s) y rotacionales (k_ϕ), modelando de esta manera la interacción suelo-estructura. La estructura se asume perfectamente adherida al suelo circundante, de modo que no hay deslizamiento ni separación a lo largo de la interfaz suelo-estructura. El espesor del estrato de suelo, que coincide con la longitud del pilote, se define mediante el parámetro L . La sección transversal del pilote es circular con un radio r_0 . Las propiedades del suelo son: E_s = módulo de Young, ν_s = coeficiente de Poisson, y ρ_s = densidad de masa. Por otro lado, las propiedades pilote son: E = módulo de Young y ρ = densidad de masa. Para simplificar la formulación matemática, se definen algunos parámetros adicionales: un módulo de corte complejo $G_s^* = G_s (1 + 2i\beta_s)$ para el suelo, donde β_s define un coeficiente de amortiguamiento equivalente (que incluye tanto el amortiguamiento del material como el de radiación); un área de sección transversal $A = \pi r_0^2$, un momento de inercia $I = \pi r_0^4$ para el pilote. Para el análisis de los resortes, solo se considera la solución particular; es decir, no se consideran los bordes de la estructura. También se considera que no se aplican cargas externas netas y que los resortes del suelo son constantes a lo largo del eje de la estructura. Los resortes transversales se obtienen dividiendo las reacciones laterales del suelo en la interfaz ($r = r_0$) por los desplazamientos de la sección, mientras que los resortes rotacionales se obtienen como el momento producido por las tensiones de corte en la interfaz a lo largo de la dirección longitudinal dividido por la rotación de la sección transversal.

El campo de desplazamiento es indeterminado en la interfaz suelo-estructura y se resuelve teniendo en cuenta la interacción con la estructura. Los desplazamientos pueden así definirse como una componente en campo libre y una componente adicional debido a la interacción suelo-estructura. El desplazamiento propuesto debe satisfacer las ecuaciones de movimiento de un medio elástico tridimensional, la ecuación de movimiento de una viga Timoshenko apoyada sobre una fundación de

Winkler, y tender a los desplazamientos de campo libre lejos de la estructura; es decir, cuando $r \rightarrow \infty$.

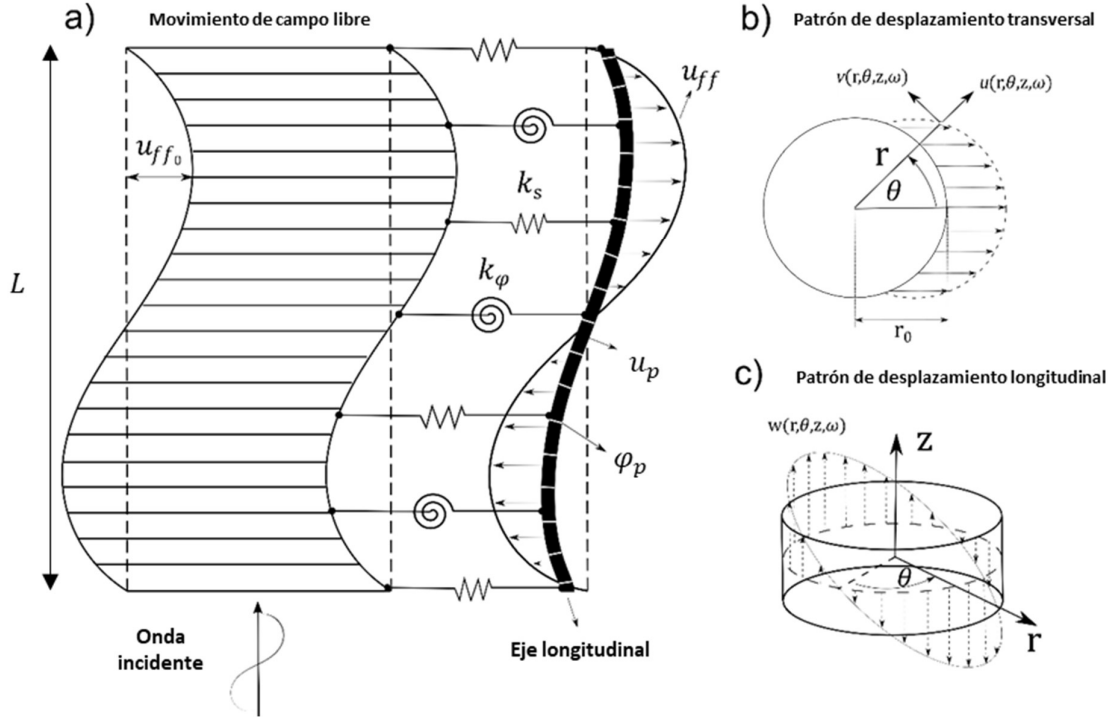


Figura 1. Estructura longitudinal subterránea sometida a una onda S.

Formulación del problema de interacción suelo-estructura

De manera simplificada se asume que el desplazamiento de campo libre es:

$$u_{ff} = u_{ff0} \cos(q_f z) \quad (1)$$

donde $q_f = \omega/V_s^*$ y $V_s^* = \sqrt{\rho_s/G_s^*}$.

Por parte de la estructura, siguiendo los desarrollos de Soffietti et al. (2024)²² y para superar incompatibilidades de las vigas de Euler-Bernoulli, la estructura se modela como una viga Timoshenko que descansa sobre una fundación Winkler, representada por resortes transversales (k_s) y rotacionales (k_ϕ) distribuidos que conectan la estructura con los desplazamientos de campo libre. De esta manera, el resorte rotacional, que permite incluir los efectos friccionales en la interfaz, actúa sobre los giros de la sección (que a su vez dependen de la distorsión de corte en la misma), mientras los resortes transversales se aplican sobre los desplazamientos horizontales. Considerando solo la solución particular, debido a que para la definición de los resortes sólo se evaluarán zonas lejanas a los bordes, la solución queda (Soffietti y Pinto, 2022¹²):

$$\varphi_p(z) = \varphi_{p0} \sin(qz) \quad (1)$$

$$\varphi_{p0} = -\Gamma_p q_f u_{ff0} \quad (2)$$

$$\Gamma_p = \frac{\frac{\overline{k_s}}{EI}}{q_f^4 + \left(\frac{k_\varphi^*}{EI} + \frac{k_s^*}{GA}\right) q_f^2 + \left(\frac{k_s^*}{EI} + \frac{k_s^* k_\varphi^*}{EIGA}\right)} \quad (3)$$

donde φ_{p0} = amplitud de la rotación seccional, $\overline{k_s} = k_s(1 + i\omega c_s)$, $k_s^* = \overline{k_s} + \rho A(i\omega)^2$, $k_\varphi^* = k_\varphi + \rho I(i\omega)^2$, $c_s = 2\beta_s k_s/\omega$ y $c_\varphi = 2\beta_s k_\varphi/\omega$. Como la solución homogénea tiene una influencia limitada cerca de los bordes, esta no es considerada en el presente análisis. El desplazamiento de la estructura puede escribirse como:

$$u_p(z) = \left[1 - \varphi_{p0} \left(\frac{EI}{k_s^*} q_f^3 + \frac{k_\varphi^*}{k_s^*} q_f \right) \right] u_{ff0} \cos(q_f z) \quad (4)$$

Campo de desplazamientos del medio sólido

Con referencia al sistema de coordenadas cilíndricas de la Figura 1 b y c, las ecuaciones de movimiento de un medio elástico tridimensional en coordenadas cilíndricas, para un movimiento armónico son (Novak & Sachs, 1973²³):

$$\eta^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 u = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{\eta^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 v = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 w = 0 \quad (7)$$

donde u , v , w son los desplazamientos radial, tangencial y longitudinal respectivamente, ω es la frecuencia de oscilación armónica y η es un factor de compresibilidad asociado al efecto de los desplazamientos longitudinales del suelo sobre las tensiones (Anoyatis y Lemnitzer, 2016²⁴). Siguiendo a Novak y Nogami (1977)¹⁹ es posible expresar η como la relación entre la velocidad de la onda P y la velocidad de la onda S, $\eta = \sqrt{2(1 - \nu_m)/1 - 2\nu_m}$.

Se observa que $\eta \rightarrow \infty$ para materiales incompresibles ($\eta = 0,5$). Algunas

suposiciones alternativas para este parámetro y discusiones adicionales pueden encontrarse en Mylonakis (2001)¹⁸.

Solución analítica para los desplazamientos del sólido

Para el desarrollo de las componentes horizontales de desplazamiento, se aplica un esquema de descomposición de Helmholtz degenerado (Anoyatis et al., 2016²⁴) para desacoplar el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales mencionado anteriormente. Con este fin, las componentes radiales y tangenciales de los desplazamientos horizontales se expresan en términos de dos funciones potenciales Φ y Ψ como se muestra a continuación:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (8)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (9)$$

Sustituir las Ecuaciones (5-6) en (8-9) conduce al siguiente nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\eta^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{V_s^*} \right)^2 \Phi = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 \Psi = 0 \quad (11)$$

donde el operador Laplaciano se define como, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. La solución a las ecuaciones anteriores puede obtenerse utilizando el método de separación de variables, lo cual permite la transformación de las ecuaciones diferenciales parciales en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que son más fáciles de manejar.

Para la obtención de las formulas finales, se consideran las siguientes restricciones al campo de desplazamientos:

- a) u y v tienen valores finitos para $r \rightarrow \infty$;
- b) la dirección de los desplazamientos horizontales coincide con la dirección del campo impuesto u_{ff} , lo que implica que:
 - en todo punto del plano horizontal, el desplazamiento horizontal coincide con la dirección $\theta = 0$;
 - las componentes radiales son nulas en $\theta = \pi/2$ y las tangenciales son nulas en $\theta = 0$;
- c) el desplazamiento horizontal es nulo en la base del estrato y las tensiones de

corte son nulas en la superficie libre.

De esta manera, la solución al sistema de ecuaciones se expresa como:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_1(q_n r) \cos(g_n z) \cos \theta \quad (12)$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_1(p_n r) \cos(g_n z) \sin \theta \quad (13)$$

Donde, A_n y B_n son coeficientes a determinar por las condiciones de contorno, K_0 y K_1 son las funciones de Bessel modificadas de segundo orden, cuyos argumentos son q_n y p_n , y n son los valores propios del sistema (modos del suelo) considerado en la solución. Es importante destacar que estos modos no están necesariamente asociados con la respuesta dinámica del suelo (es decir, son simplemente un conjunto ortogonal de funciones) y existen incluso en el caso estático, $\omega = 0$. De esta forma, los valores propios g_n pueden definirse como:

$$g_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H}, n = 1, 2, 3 \dots \quad (14)$$

Además, q_n y p_n son números de onda asociadas a las ondas P y S, respectivamente y se definen como:

$$q_n = \frac{1}{\eta} \sqrt{g_n^2 - \left(\frac{\omega}{V_s^*}\right)^2}, p_n = q_n \eta \quad (15)$$

Se anticipa que la solución de los desplazamientos se obtiene mediante la superposición de todas las soluciones particulares (modos). Por lo que pueden expresarse como:

$$u = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[q_n K_0(q_n r) + \frac{K_1(q_n r)}{r} - \frac{\delta_n}{r} K_1(p_n r) \right] \cos(g_n z) \quad (16)$$

$$v = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \frac{K_1(q_n r)}{r} - \delta_n \left[p_n K_0(p_n r) + \frac{K_1(p_n r)}{r} \right] \right\} \cos(g_n z) \quad (17)$$

$$\delta_n = \frac{q_n K_2(q_n r_0)}{p_n K_2(p_n r_0)} \quad (18)$$

Considerando que el medio está sometido a una onda de corte simple, para asegurar la continuidad en los desplazamientos horizontales se define que $u|_{r_0} = u_{ff_0} \cos \theta$ y $v|_{r_0} = -u_{ff_0} \sin \theta$.

La propagación de ondas cortantes en la dirección vertical, conduce únicamente a desplazamientos horizontales bajo condiciones de campo libre. Por lo tanto, si la estructura no estuviera presente los desplazamientos longitudinales serían cero, $w = 0$. Sin embargo, debido a la rigidez flexional de la estructura y la interacción suelo-estructura las secciones transversales tienden a rotar (por ejemplo, Han, 1989), desarrollándose un patrón de desplazamientos verticales sobre la superficie de interacción. Este patrón de desplazamiento, que es debido a las rotaciones de las secciones transversales, se muestra en la Figura 1c.

Siguiendo a Novak et al. (1978)²⁰, la solución para la Ecuación (7), considerando un patrón de desplazamientos longitudinales que corresponde a la rotación de la sección transversal de la viga, se puede definir como:

$$w = \bar{\varphi} \cos \theta K_1(\bar{q}r) \quad (19)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\Gamma q_f u_{ff_0} \cos(q_f z)}{K_1(\bar{q}r_0)} \quad (20)$$

donde $\bar{q} = \omega i / V_s^*$. Si se impone una unión perfecta, el desplazamiento longitudinal del sólido en la interfaz ($r = r_0$) resulta igual al desplazamiento axial de la estructura ($w = \varphi_{p_0}$), mientras que, lejos de la misma, el desplazamiento longitudinal del sólido se anula, $w \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$.

En resumen, el campo de desplazamientos puede definirse mediante las Ecuaciones (16), (17) y (19). Las soluciones propuestas son equivalentes a las derivadas por Novak y Nogami (1977)¹⁹, para los desplazamientos horizontales y a las encontradas en Novak et al. (1978)²⁰, para desplazamientos longitudinales (aunque esta última fue desarrollada para casos de deformación plana).

Resortes de Winkler propuestos

Siguiendo a Anoyatis et al. (2016)²⁴, los resortes transversales se evalúan dividiendo las reacciones laterales del suelo por los desplazamientos laterales de la estructura. Los resortes rotacionales, por su parte, de acuerdo con Novak et al. (1978)²⁰, se definen como el momento por unidad de longitud debido a las tensiones de corte en la interfaz a lo largo de la dirección z , dividido por las rotaciones de la sección.

Las reacciones laterales del suelo debidas al patrón de desplazamiento definido en la sección anterior se obtienen según Anoyatis (2016)²⁰ como:

$$p(r_0) = - \int_0^{2\pi} [\sigma_r(r_0) \cos(\theta) - \tau_{r\theta}(r_0) \sin(\theta)] r_0 d\theta \quad (21)$$

donde σ_r es la tensión normal en la dirección radial y $\tau_{r\theta}$ es la tensión de corte, ambas actuando en la interfaz suelo-estructura. Las tensiones se obtienen mediante los campos de desplazamiento como:

$$\sigma_r = G \left[\eta^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \quad (22)$$

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (23)$$

Es interesante notar que el comportamiento tridimensional del suelo provoca que las tensiones radiales estén acopladas con los desplazamientos longitudinales a través del término $\partial w / \partial z$ (Ec. 22). Las soluciones disponibles actualmente en la literatura consideran que los desplazamientos laterales y longitudinales están desacoplados; por lo tanto, los resortes transversales solo dependen de los desplazamientos transversales, por ejemplo, Anoyatis et al., (2016)²⁴, Novak et al. (1978)²⁰. Así, la solución propuesta en este trabajo puede interpretarse como una generalización de los resortes de deformación plana desacoplados.

Considerando la variación de las tensiones a lo largo de la interfaz, realizando la integración sobre θ , reorganizando las Ec. (22) y (23), introduciendo estas expresiones en la Ec. (21), y dividiendo por la Ec. (4), las reacciones laterales del suelo son:

$$k_{s_n} = \pi G_s^* \frac{\left[\frac{\eta^2 (q_n r_0)^2 K_1(q_n r_0) + \delta_n (p_n r_0)^2 K_1(p_n r_0)}{q_n r_0 K_0(q_n r_0) + K_1(q_n r_0) - \delta_n K_1(p_n r_0)} - \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \right) \Gamma_p q_f^2 r_0^2 \right]}{\left[1 - \varphi_{p_0} \left(\frac{EI}{k_s^*} q_f^3 + \frac{k_\varphi^*}{k_s^*} q_f \right) \right]} \quad (24)$$

A partir de la Ec. (24), se observa que k_{s_n} es un parámetro complejo, que representa la reacción del suelo asociado con el n-ésimo modo, mostrando además, que cada modo provee un valor diferente de rigidez. El resorte transversal, entonces, depende de los parámetros del suelo y de la estructura. Como se puede ver, el resorte aparece en ambos lados de la ecuación (a través de Γ_p), por lo que se justifica un proceso iterativo simple para definir un valor final para k_s . Además, se puede ver que los resortes transversales son constantes a lo largo de la dirección longitudinal, representando un valor promedio en la altura del estrato.

Si se descartan los efectos de interacción, la Ec. (24) deriva en las soluciones propuestas por Anoyatis et al. (2016)²⁴ y Novak et al. (1978)²⁰.

Por su parte, los resortes rotacionales se definen como el momento producido por las tensiones de corte en la interfaz a lo largo de la dirección longitudinal, dividido por el giro de la sección. Las tensiones de corte en dirección longitudinal se obtienen a partir de los campos de desplazamiento de la siguiente manera:

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (25)$$

El momento por unidad de longitud de la estructura producido por las tensiones de corte en la interfaz (M_ϕ) se obtiene como:

$$M_\phi = \int_0^{2\pi} \tau_{rz} r_0^2 \cos(\theta) d\theta \quad (26)$$

Finalmente, el resorte rotacional resulta:

$$k_\phi = \pi G r_0^2 \left[\bar{q} r_0 \frac{K_0(\bar{q} r_0)}{K_1(\bar{q} r_0)} + 1 + \Gamma_P^{-1} \right] \quad (27)$$

En cuanto al caso de los resortes rotacionales se observa a partir de la Ec. (27) que también dependen de los parámetros del suelo y de la estructura, aunque no dependen de los modos de vibración, ya que los desplazamientos w , se generan por los desplazamientos de campo libre. También se observa que los resortes rotacionales son constantes a lo largo de la coordenada longitudinal z ; y que debido a la interacción, son función de los resortes del suelo (a través de Γ_P^{-1}) lo que justifica un proceso iterativo para definir los valores finales.

En estos resortes rotacionales los desplazamientos laterales y longitudinales están acoplados a través de la respuesta tridimensional del suelo, como se observa en la Ec. (27). Este acoplamiento resulta en una diferencia considerable con respecto a los resortes de deformación plana propuestos por Novak et al. (1978)²⁰. Estos consideran un disco rígido embebido en un medio elástico sometido a rotaciones armónicas que solo están asociadas a desplazamientos longitudinales; es decir, $u = v = 0$. Por lo tanto, los campos de desplazamiento longitudinal y transversal están desacoplados en el enfoque de Novak, siendo expresados como:

$$k_\phi = \pi G r_0^2 \left[q r_0 \frac{K_0(q r_0)}{K_1(q r_0)} + 1 \right] \quad (28)$$

Se observa que la ecuación propuesta por Novak está incluida en la Ec. (27), por lo que la solución propuesta puede interpretarse como una generalización de los resortes de deformación plana propuestos por Novak et al. (1978)²⁰. Al considerar que los campos de desplazamiento están acoplados, aparece un término adicional, Γ_p^{-1} , que tiene un efecto significativo en los resortes rotacionales. De esta manera, los resortes rotacionales propuestos en este trabajo son aproximadamente el doble de los valores propuestos por Novak para bajas frecuencias. Este resultado coincide con el trabajo realizado por Soffietti et al. (2024)²² y se valida a través de resultados analíticos y numéricos descritos en las siguientes secciones.

Definidos los resortes de esta forma, es interesante destacar que se los puede escribir como:

$$k_s = \text{Real}(k_s) + i\text{Imag}(k_s) = k_s(1 + 2i\beta_s) \quad (29)$$

$$k_\varphi = \text{Real}(k_\varphi) + i\text{Imag}(k_\varphi) = k_\varphi(1 + 2i\beta_s) \quad (30)$$

Donde la parte real puede interpretarse como un resorte elástico dependiente de la frecuencia, mientras que la componente imaginaria se puede asociar a un amortiguador actuando en paralelo con la componente real del resorte.

Comparación de resortes transversales

Los modelos de Winkler han sido ampliamente definidos en la literatura para diferentes problemas de ingeniería, por ejemplo, Novak y Nogami (1977)¹⁹, Dobry et al. (1982)¹⁶, Anoyatis y Lemnitzer (2017)³, Anoyatis y Mylonakis (2012)²⁵, Makris y Gazetas (1992)²⁶. El enfoque de viga sobre fundación elástica es muy atractivo debido a su simplicidad, pero depende de una definición adecuada de las constantes de los resortes. Por lo tanto, se han propuesto varias formulaciones de resortes estáticos y dinámicos en la literatura, considerando diferentes supuestos. En este artículo se compararán algunas de las expresiones existentes. Para mayor detalle sobre los diferentes modelos de resortes, se recomienda leer el trabajo de Anoyatis y Lemnitzer (2017)³.

Los resortes transversales normalizados se muestran en la Figura 2 como una función de $a_0 = r_0\omega/V_s$, para un caso donde $L = 80$ m, $r_0 = 1$ m, $E_p/E_s = 1000$, $u_{f0} = 1$ m, $\rho_p/\rho_s = 0,66$, $\beta_s = 0,10$ y $\nu_s = 0,30$. La solución propuesta y la de Anoyatis et al. (2016), son evaluada para el primer modo de vibración del estrato, es decir, $n = 1$.

Puede observarse que, las soluciones dadas por Dobry (1982)¹⁶ y Makris y Gazetas (1992)²⁶ son independientes de la frecuencia y muestran valores alrededor de $k_s/G_s \approx 3$. La solución propuesta por Novak et al. (1978)²⁰, para casos de deformación plana, no permite obtener valores para casos estáticos y crece con la frecuencia hasta volverse asintótico a $k_s/G_s \approx 3$, algo similar ocurre con la solución de Anoyatis et al. (2016)²⁴, solo que, por incluir esta última los modos de vibración del medio, permite capturar los valores estáticos de los resortes. Es interesante mostrar que, para $a_0 = \pi r_0/L$, coincidente con la frecuencia fundamental del estrato vibrando

horizontalmente, se tiene una caída significativa en el valor del resorte, pues el medio, en resonancia, provee menor resistencia. La solución propuesta coincide con la de Anoyatis, pero a partir de $a_0 \approx 0,2$, comienza a mostrar valores mayores y no muestra comportamiento asintótico en el rango de frecuencias evaluada. Esto se debe a que, la solución de Anoyatis se desarrolla sin incluir la interacción con la estructura.

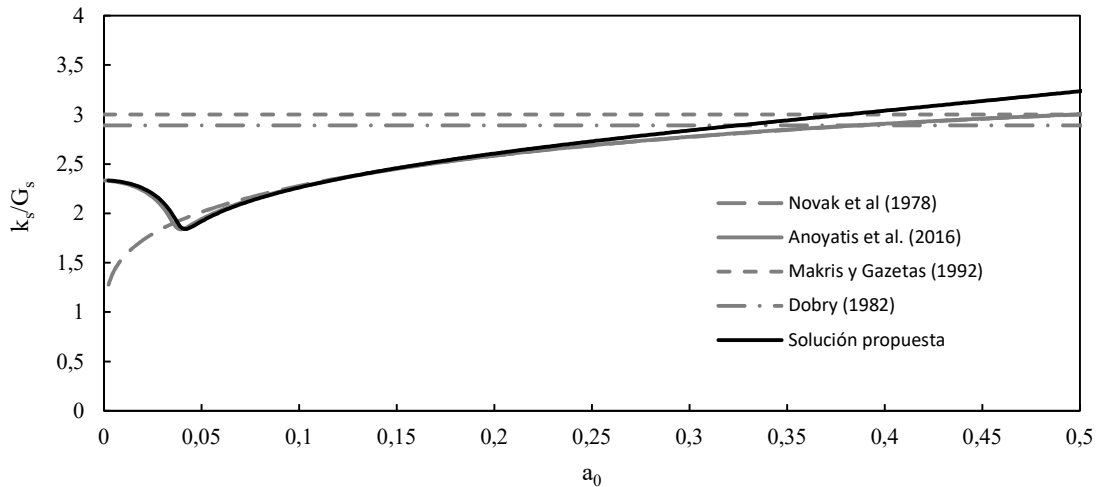


Figura 2. Comparación de resortes transversales.

Comparación de resortes rotacionales

Con respecto a los resortes rotacionales, la solución propuesta (Ec. 27) se compara con la de Novak et al. (1978)²⁰, obtenida para casos de deformación plana y con la de Li et al. (2023)²¹ para la evaluación sísmica de túneles, para para un caso donde $L = 80$ m, $r_0 = 1$ m, $E_p/E_s = 1000$, $u_{ff_0} = 1$ m, $\rho_p/\rho_s = 0,66$, $\beta_s = 0,10$, $\nu_s = 0,30$ y $n = 1$ (Figura 3).

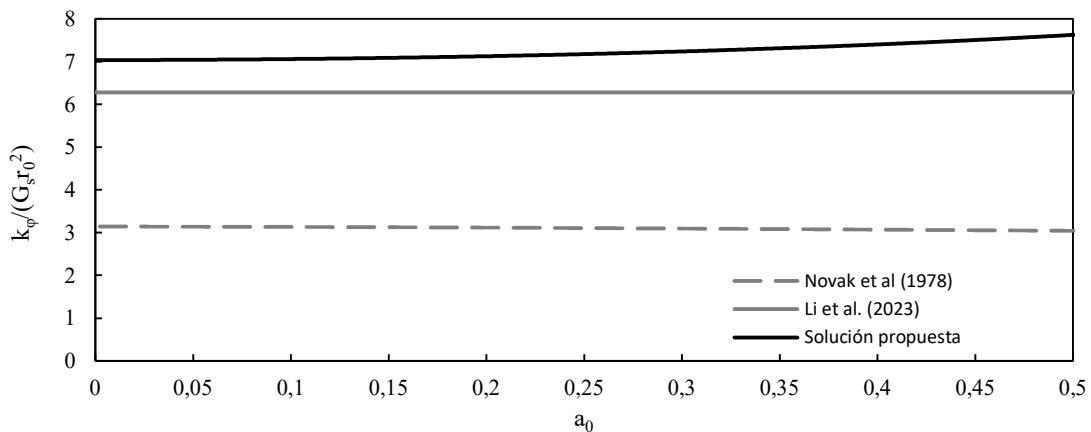


Figura 3. Comparación de resortes rotacionales.

Puede observarse que la solución de Novak, planteada para casos de deformación plana y donde los giros están desacoplados, presenta un valor prácticamente

constante alrededor de π en todo el rango de frecuencias. La solución de Li et al. (2023)²¹ obtenida mediante planteos elásticos en medios tridimensionales para casos estáticos, también muestra un valor constante igual a 2π , este resultado es consistente con la Ec. (27) del presente trabajo, si la interacción con la estructura no fuera considerada. Pero, al considerar el efecto de la estructura sobre el valor de los resortes, se observa que los valores crecen suavemente con a_0 , partiendo $k_\varphi(0)/G_s = 7$, llegando a $k_\varphi(0,5)/G_s = 7,6$.

Validación con otras soluciones

En la presente sección se validan los resortes propuestos en este trabajo comparando una solución basada en el Método de los Elementos Finitos 3D (MEF), una solución de un modelo continuo-elástico que no incluye las tensiones friccionales en la interfaz (Zheng et al., 2024¹⁰) y la solución propuesta al modelar un problema dinámico de viga de Timoshenko sobre fundación de Winkler con dos parámetros. En este caso no se comparan directamente los resortes sino que se evalúa el Factor de Interacción Cinemático I_u , que relaciona el desplazamiento de la cabeza del pilote, con el desplazamiento de campo libre sobre la superficie: $I_u = u_p(0, \omega)/u_{ff}(0, \omega)$. Por simplicidad no se expone el desarrollo completo, pero es una extensión del presentado en las Ec. 1 y 4, incluyendo las condiciones de borde.

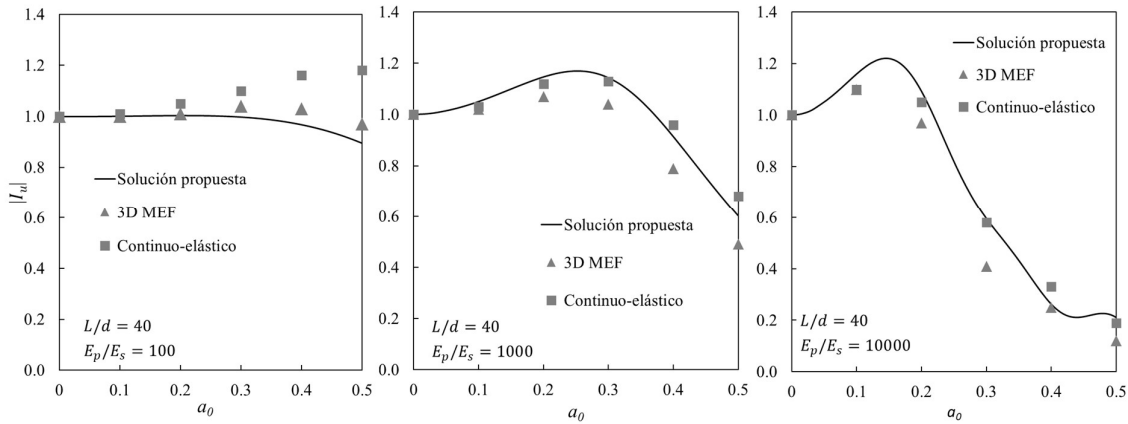


Figura 4. Validación de los resortes propuestos evaluando I_u .

En la Figura 4 se muestra el Factor de Interacción Cinemático en función de la frecuencia adimensionalizada a_0 para diferentes impedancias de rigideces entre el medio sólido y la estructura. Se puede observar que los resultados obtenidos por el modelo de Timoshenko con los resortes propuestos sigue las tendencias de las otras soluciones, pero proporcionan resultados que concuerdan mejor con el modelo completo MEF 3D para todos los casos analizados. Esto se puede explicar debido al hecho de que los resortes transversales y rotacionales se derivan de un enfoque de continuo tridimensional, y por lo tanto, son capaces de representar mejor algunas características de la naturaleza tridimensional del problema, como las tensiones de corte a lo largo del fuste debido a las rotaciones de la sección transversal.

El modelo continuo-elástico también sigue la tendencia del modelo MEF 3D, pero exhibe factores de respuesta cinemática más altos en todos los casos. Esto se puede atribuir al hecho de que este modelo asume un contacto “suave” entre el suelo y el pilote, a diferencia de la solución propuesta, que incluye resortes de rotación debido al corte a lo largo del fuste, y del modelo completo 3D FE, que también asume una unión perfecta en la superficie de interfaz. Un contacto suave, como se asume en el modelo elástico-continuo, es análogo a establecer $k_\varphi = 0$ dentro del marco del modelo de Timoshenko. Por esta razón, la concordancia entre la solución continuo-elástico y el modelo MEF 3D mejora a medida que el suelo se vuelve más blando.

Análisis paramétrico

Para estudiar la variación de los resortes propuestos con algunos parámetros relevantes de los problemas ingenieriles, se evaluarán en función del contraste de rigidez entre la estructura y el suelo, en primera instancia, y luego se evaluará cómo varían con la altura del estrato.

En la Figura 5 se puede observar que los resortes transversales son independientes del contraste de rigidez para bajas frecuencias ($a_0 < 0,5$), pero, a partir de $a_0 \geq 0,5$, comienzan a variar según E_p/E_s . Mientras más rígido es el medio sólido, menores son los valores de los resortes.

Con los resortes rotacionales, en la Figura 5 se observa que la tendencia anterior se invierte, ya que, mientras más rígido es el medio, mayores son los valores de los resortes normalizados en todo el rango de frecuencias analizado. Los resultados de ambos resortes, están en concordancia con los presentado en Soffietti et al. (2024).

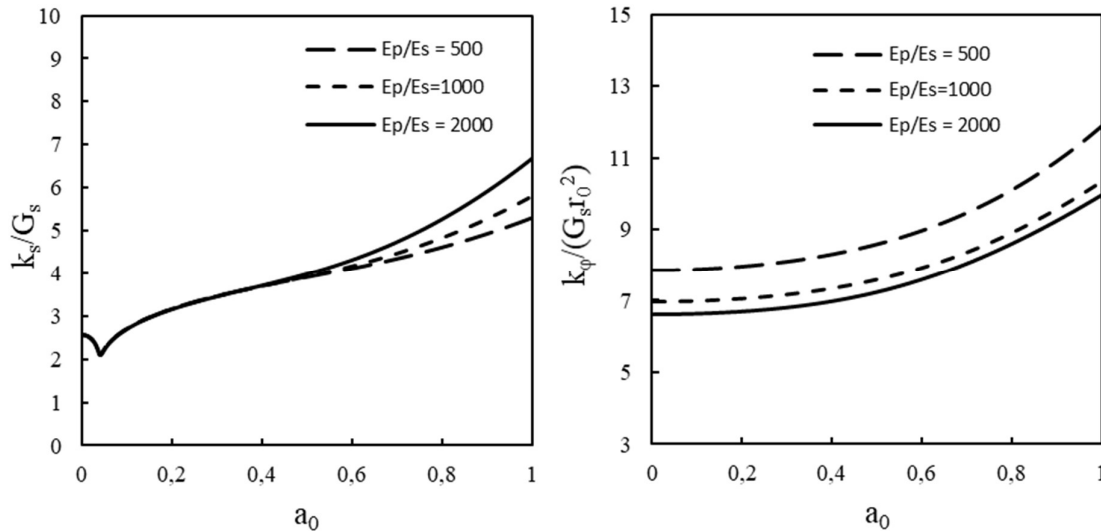


Figura 5. Resortes transversales y rotacionales propuestos en función del contraste de rigideces E_p/E_s .

Por otra parte, en la Figura 6 se observa la variación de los resortes con la esbeltez del estrato. Es importante destacar que, si bien el análisis de la estructura se realiza

lejos de los bordes (solo se incluye la solución particular), por lo que no puede analizarse la influencia de su longitud, L si tendrá influencia en los valores propios del medio y variará su frecuencia fundamental.

En la Figura 6 se observa que los resortes transversales tienen una influencia significativa de L , ya que, mientras menor es L , mayores son los valores de los resortes, en todo el rango analizado. Además, puede observarse cómo varía la frecuencia fundamental, al observar las caídas en los valores de k_s/G_s . Estos resultados concuerdan con los presentados en Anoyatis et al. (2016).

La influencia de L en los resortes rotacionales también se muestra en la Figura 6. Puede observarse que, a menor L , los resortes son menores y su variación con a_0 es significativamente menor. Todos los casos evaluados parten del mismo valor para $a_0 = 0$, pero crecen con diferentes tendencias, siendo mayor el crecimiento de $L/D = 40$.

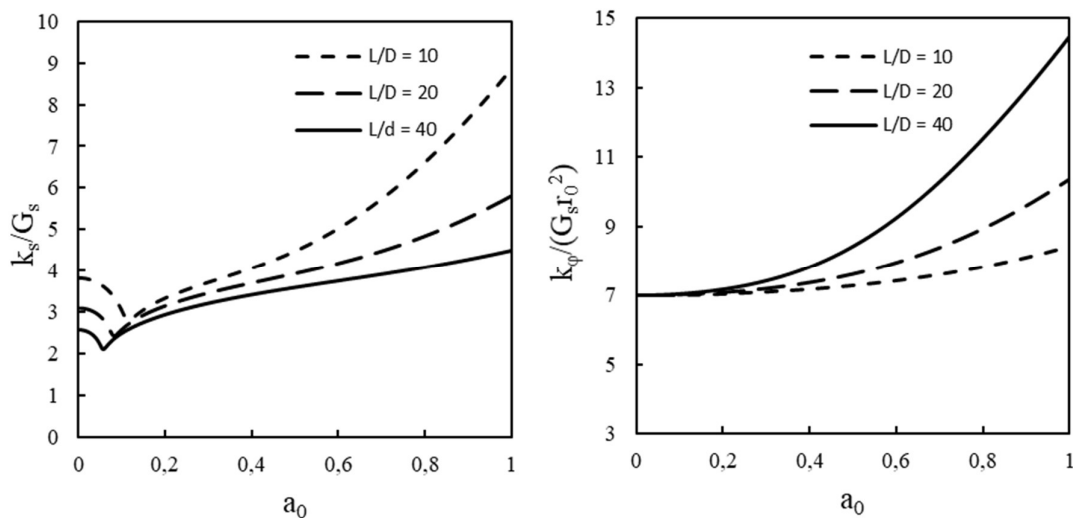


Figura 6. Resortes transversales y rotacionales propuestos para diferentes L/D .

Conclusiones

En el presente trabajo se formula un modelo analítico para la evaluación de resortes transversales y rotacionales tipo Winkler para estructuras longitudinales enterradas sujetas al paso de ondas S. Los resortes propuestos superan los inconvenientes de los modelos de deformación plana propuestos anteriormente en la literatura, ya que consideran la variación de los desplazamientos a lo largo de la dirección longitudinal y no desaparecen para bajas frecuencias, lo que permite la evaluación de casos pseudoestáticos, que típicamente controlan las fuerzas inducidas sobre las estructuras enterradas en los análisis de interacción cinemática.

Los resortes transversales también muestran una estrecha semejanza con los modelos que incluyen la longitud del estrato y los modos de vibración del mismo, aunque estos últimos ignoran la interacción del medio con la estructura para definir los valores de resortes. Los resortes rotacionales, por su parte, duplican los valores

de los modelos planos y muestran resultados cercanos a otros modelos presentes en la literatura, donde el medio se evalúa como un continuo-elástico. Por lo tanto, el enfoque propuesto puede interpretarse como una generalización de los resortes previamente propuestos en la literatura.

También se aplicaron los resortes propuestos para evaluar el caso de una viga de Timoshenko sobre fundación de dos parámetros sometida a ondas de corte. Se comparó el Factor de Interacción Cinemática Transversal resultante, con aquellos provistos por otras soluciones analíticas y numéricas, mostrando muy buenos ajustes.

Finalmente, las principales tendencias observadas en el presente trabajo indican que:

- Al variar en frecuencia, los resortes transversales muestran una caída importante en la zona cercana a la frecuencia de resonancia del estrato, pero a partir de este punto vuelven a crecer con la frecuencia de manera monótona. Este crecimiento es mayor a medida que aumenta el contraste de rigidez. Además, puede observarse que, para frecuencias $a_0 < 0,5$, la influencia de E_p/E_s es despreciable, pero comienza a tomar relevancia a partir de $a_0 \geq 0,5$.
- Los resortes rotacionales muestran un comportamiento diferente, ya que, para todo el rango de frecuencias y para todos los contrastes de rigidez analizados, los valores crecen con una tendencia similar. Además, mientras mayor es el contraste de rigidez, menores son los resortes resultantes.
- Respecto a la influencia de la altura del estrato en los resortes transversales, puede verse que, por un lado, mientras más alto es el estrato, la caída de los resortes se da para frecuencias más bajas. Los resortes muestran valores más altos, mientras más corto es el estrato; estas diferencias se remarcan principalmente para bajas y altas frecuencias.
- Los resortes rotacionales muestran una tendencia contrapuesta, ya que, mientras menor es la longitud del estrato, menores son los resortes. Además, los tres casos analizados parten del mismo valor para $a_0 = 0$, pero crecen a diferentes tasas, siendo que, mientras mayor es L , mayor es la tasa de crecimiento.

Referencias

- 1 - Mylonakis, G., & Gazetas, G. 2002. Kinematic pile response to vertical P-wave seismic excitation. Journal of Geotechnical and geoenvironmental Engineering, 128(10), 860-867. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2002\)128:10\(860\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2002)128:10(860))
- 2 - Pinto, F., Rocca, R. J., Huerta Soaje, P. F. J., & Prato, C. A. 2015. Seismic Demands for Deep Tunnels and Shafts. In 13th ISRM International Congress of Rock Mechanics. International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering. Montreal, Canada.
- 3 - Anoyatis, G., & Lemnitzer, A. 2017. Dynamic pile impedances for laterally-loaded piles using improved Tajimi and Winkler formulations. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 92, 279-297. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2016.09.020>
- 4 - Beredugo, Y. O., & Novak, M. 1972. Coupled horizontal and rocking vibration of

- embedded footings. Canadian Geotechnical Journal, 9(4), 477-497.
<https://doi.org/10.1139/t72-046>
- 5 - Guha, I., Randolph, M. F., & White, D. J. 2016. Evaluation of elastic stiffness parameters for pipeline-soil interaction. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 142(6), 04016009.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0001466](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001466)
 - 6 - Kramer, S. 1996. Geotechnical Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 348-422.
 - 7 - Winkler, E. (1867). Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc. H. Dominicus.
 - 8 - Selvadurai, A. P. S. 1985. Soil-pipeline interaction during ground movement. In Civil Engineering in the Arctic Offshore (pp. 763-773).
 - 9 - St John, C. M., & Zahrah, T. F. 1987. Aseismic design of underground structures. Tunnelling and underground space technology, 2(2), 165-197.
[https://doi.org/10.1016/0886-7798\(87\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0886-7798(87)90011-3)
 - 10 - Zheng, C., Mylonakis, G., & Kouretzis, G. (2024). Inertial and kinematic response of laterally loaded piles: Sensitivity of elastodynamic continuum solutions to key assumptions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 178, 108485.
 - 11 - Wu, H. N., Shen, S. L., Yang, J., & Zhou, A. 2018. Soil-tunnel interaction modelling for shield tunnels considering shearing dislocation in longitudinal joints. Tunnelling and Underground Space Technology, 78, 168-177.
<https://doi.org/10.1016/j.tust.2018.04.009>
 - 12 - Soffiatti, F. P., & Pinto, F. 2022. Analytical Solution for the Evaluation of Kinematic Demands on Underground Linear Structures Subjected to S-Waves. *International Journal of Geomechanics*, 22(11), 04022213.
 - 13 - Yin, J. H. 2000. Closed-form solution for reinforced Timoshenko beam on elastic foundation. Journal of Engineering Mechanics, 126(8), 868-874.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:8\(868\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:8(868))
 - 14 - Sánchez-Merino, A. L., Fernández-Sáez, J., & Navarro, C. 2009. Simplified longitudinal seismic response of tunnels linings subjected to surface waves. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 29(3), 579-582.
<https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2008.06.003>
 - 15 - Matsubara, K., & Hoshiya, M. 2000. Soil spring constants of buried pipelines for seismic design. Journal of engineering mechanics, 126(1), 76-83.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:1\(76\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:1(76))
 - 16 - Dobry, R., Vicente, E., O'Rourke, M. & Roesset, J. M. 1982. Horizontal stiffness and damping of single piles. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE, 108(3), pp. 439-459. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0001259>
 - 17 - Kavvas, M. & Gazetas, G., 1993. Kinematic seismic response and bending of free-head piles in layered soil. Geotechnique, 43(2), pp. 207-222.
<https://doi.org/10.1680/geot.1993.43.2.207>

- 18 - Mylonakis, G. 2001. Elastodynamic model for large-diameter end-bearing shafts. *Soils and foundations*, 41(3), 31-44. https://doi.org/10.3208/sandf.41.3_31
- 19 - Novak, M., & Nogami, T. 1977. Soil-pile interaction in horizontal vibration. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3), 263-281. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290050305>
- 20 - Novak, M., Aboul-Ella, F., & Nogami, T. 1978. Dynamic soil reactions for plane strain case. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 104(4), 953-959. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002392>
- 21 - Li, H., Zhou, N., Huang, J., Zhao, M., Liao, W., Zhao, X., & Du, X. (2023). Analytical solution of longitudinal seismic response of circular tunnel across soil-rock stratum based on improved elastic foundation beam model. *Computers and Geotechnics*, 159, 105383.
- 22 - Soffietti, F. P., Turello, D. F., & Pinto, F. (2024). Pseudo-static Winkler springs for longitudinal underground structures subjected to shear waves. *Geomechanics and Geoengineering*, 1-22.
- 23 - Novak, M., & Sachs, K. 1973. Torsional and coupled vibrations of embedded footings. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2(1), 11-33. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290020103>
- 24 - Anoyatis, G., Mylonakis, G., & Lemnitzer, A. 2016. Soil reaction to lateral harmonic pile motion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 87, 164-179.
- 25 - Makris, N., & Gazetas, G. (1992). Dynamic pile-soil-pile interaction. Part II: Lateral and seismic response. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 21(2), 145-162.