

MODELO MATEMÁTICO SIMPLE PARA EL CÁLCULO DEL PERÍODO FUNDAMENTAL DE VIBRACIÓN DE UN VIADUCTO TÍPICO.

Marcelo Rubinstein, Oscar Möller, Juan P. Ascheri,
Ingeniero Civil, Dr. Ingeniero Civil, Ingeniero Civil,
Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras, FCElyA, U.N.R.,
Rosario – Santa Fe – Argentina
marub@fceia.unr.edu.ar

Alejandro P. Giuliano
Ingeniero Civil
Instituto Nacional de Prevención Sísmica
San Juan – Argentina
giuliano@inpres.gov.ar

RESUMEN

Este trabajo se refiere al cálculo del período fundamental de vibración, en dirección transversal, para el módulo tipo de un viaducto, puente de varios tramos de luces iguales, con tablero apoyado en pilas mediante apoyos de neopreno. Aplicando un modelo matemático tipo péndulo invertido con dos grados de libertad se deducen expresiones sencillas para el cálculo de los períodos de los dos modos de vibración, cuyos desplazamientos son fáciles de interpretar. La exactitud de los resultados depende de la relación de rigidez transversal entre los apoyos de neopreno y la pila. Empleando un modelo matemático más complejo se analiza este tema y se obtienen conclusiones útiles sobre condiciones de diseño que limitan el campo de aplicación de la solución propuesta.

ABSTRACT

This work refers to the calculation of the fundamental period of vibration, in the transverse direction, for the module type of a viaduct, bridge of several sections of equal spans, with decks rested on bents by neoprene supports. Applying a mathematical model type inverted pendulum with two degrees of freedom, simple expressions are deduced for the calculation of the period of both vibration modes, which displacements are easy to interpret. The accuracy of the results depends on the relation of transverse stiffness between the neoprene supports and the bent. Using a more complex mathematical model this topic is analyzed and useful conclusions are obtained on conditions of design that limit the field of application of the proposed solution.

INTRODUCCIÓN

Para el cálculo de las solicitaciones sísmicas de los puentes, en general, es necesario determinar los períodos fundamentales de vibración en la dirección del tránsito o longitudinal y en la dirección normal a la anterior o transversal. Con este propósito se emplean modelos matemáticos del puente en cuestión, los que pueden ser de diversa complejidad ^[1] y conducir a resultados más o menos aproximados, los que se utilizan con distintos objetivos, anteproyectos, proyectos ejecutivos, comparación de diseños, etc. Se debe observar que un modelo matemático sencillo puede, en ciertos casos, conducir a resultados aproximados con exactitud suficiente y con las ventajas de disminuir posibilidades de error y de describir básicamente el funcionamiento de la estructura en vibraciones libres.

En este trabajo se analiza el cálculo del período fundamental de vibración en dirección transversal, para el módulo tipo de un viaducto, puente de varios tramos de luces iguales, con superestructura apoyada en pilas mediante apoyos de neopreno.

Se aplica un modelo matemático tipo péndulo invertido con dos grados de libertad correspondientes a los desplazamientos transversales de la viga bancada y del tablero respectivamente. Empleando conocimientos de la dinámica estructural ^{[2],[3]}, se plantea la correspondiente ecuación de las frecuencias. Luego, a partir de la resolvente de dicha ecuación, para valores relativamente bajos de la relación entre las rigideces transversales de los apoyos de neopreno y de la pila, resulta posible encontrar expresiones simplificadas para las frecuencias, de muy fácil empleo e interesante interpretación física.

La aplicación a un caso corriente correspondiente a una pila tipo con viga bancada, tres columnas y fundación directa sirve para discutir las condiciones de diseño que establecen límites para el campo de aplicación de la solución propuesta.

MODELO MATEMÁTICO

Se considera un viaducto recto, representado en elevación en la Figura 1, con tramos de igual luz apoyados, mediante apoyos de neopreno, en pilas con viga bancada y columnas con fundación directa.

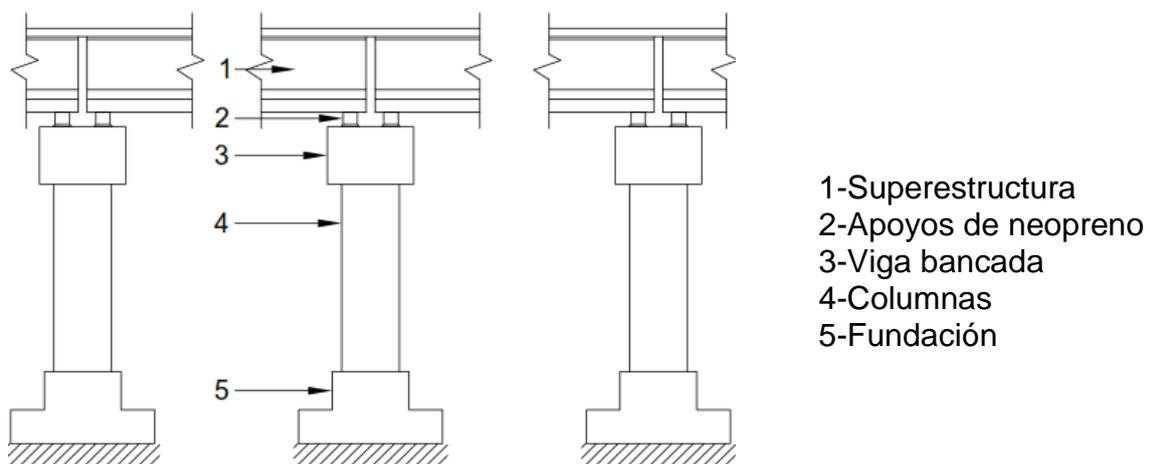


Figura 1. Elevación del viaducto regular

Se supone a las pilas de igual altura y expuestas a la misma aceleración sísmica del suelo, perpendicular al eje del puente, se asume que la superestructura se desplaza horizontalmente como cuerpo rígido y que el coeficiente de compresibilidad o balasto del suelo de fundación es suficientemente alto para ignorar efectos de interacción suelo-estructura.

De acuerdo a dichas hipótesis la respuesta transversal de todas las pilas y los semitramos correspondientes será la misma y representativa de la respuesta de todo el puente. En la Figura 2 se muestra una vista frontal de la pila tipo y de la sección transversal de la superestructura y en la Figura 3 el modelo matemático adoptado, tipo péndulo invertido con dos grados de libertad correspondiente a los desplazamientos horizontales de la superestructura y de la viga bancada. Se ha designado con M a la masa de las dos mitades de luces de la superestructura adyacentes a la pila, m a la masa de la viga bancada y de la mitad superior de las columnas, k es la rigidez transversal del conjunto de apoyos de neopreno y K la rigidez transversal de la pila.

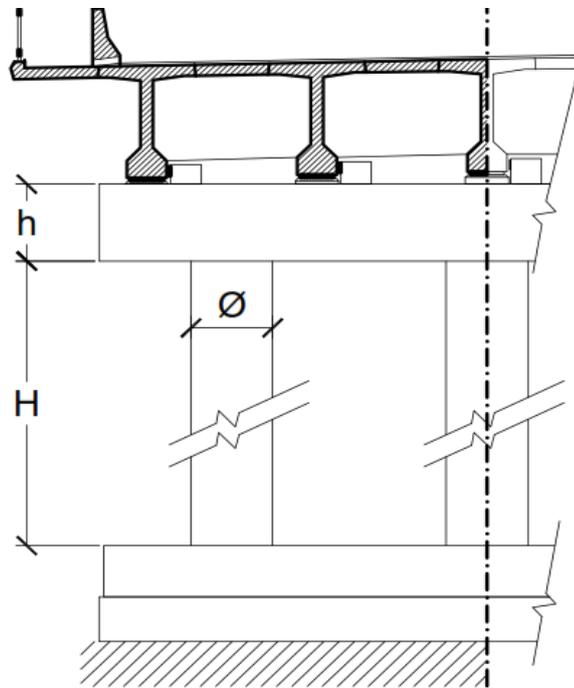


Figura 2. Vista frontal de la pila tipo y sección transversal de la superestructura.

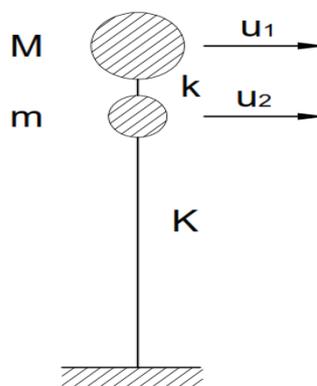


Figura 3. Modelo matemático

FRECUENCIAS DE LOS MODOS NATURALES DE VIBRACIÓN

Solución exacta

Aplicando conocimientos de Dinámica Estructural, las frecuencias circulares ω_1 y ω_2 del modelo matemático presentando se calculan mediante la ecuación de las frecuencias que se obtiene igualando a cero el siguiente determinante:

$$\text{Det}([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (1)$$

Donde $[K]$ y $[M]$ son las respectivas matrices de rigidez y de masa:

$$[K] = \begin{vmatrix} k & -k \\ -k & k + K \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$[M] = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \quad (3)$$

Llamando x a ω^2 , resulta la siguiente ecuación de 2º grado:

$$Mmx^2 - [k(m + M) + KM]x + kK = 0 \quad (4)$$

Siendo la solución:

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{M} + (k + K) \frac{1}{m} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{k}{M} + (k + K) \frac{1}{m} \right]^2 - \frac{kK}{mM}} \quad (5)$$

En adelante se denomina a ésta “solución exacta” para distinguirla de la “solución aproximada” que se presenta a continuación.

Solución aproximada

En la ecuación (5) se realiza la simplificación siguiente:

$$k + K = K \left(1 + \frac{k}{K} \right) \cong K \quad (6)$$

Es decir que se desprecia la relación de rigideces de los apoyos de neopreno con respecto a la pila, frente a la unidad. En la aplicación que se encuentra más adelante se analiza el campo de validez de esta aproximación.

Combinando las ecuaciones (5) y (6), resulta:

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{M} + \frac{K}{m} \right] \pm \frac{1}{2} \left[\frac{k}{M} - \frac{K}{m} \right] \quad (7)$$

Luego:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (8)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (9)$$

La ecuación (8) da el valor, aproximado, de la frecuencia circular del primer modo de vibración transversal, en consecuencia el período fundamental resulta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (10)$$

Las ecuaciones (8) y (9) indican que el primer modo de vibración corresponde a la superestructura conectada mediante los apoyos de neopreno a una infraestructura rígida sin masa y el segundo modo a la pila desvinculada de la superestructura. Es decir que aparecen desacopladas las vibraciones de la superestructura y de la pila.

RIGIDECES

Para comparar la solución aproximada con la exacta, ecuaciones (5) y (8) son necesarias las rigideces k y K .

Rigidez transversal de los apoyos de neopreno.

Resulta:

$$k = N \frac{A \cdot G}{n \cdot e} \quad (11)$$

Donde:

N: Cantidad de apoyos de neopreno que conectan la superestructura a la pila.

A: área, en planta, de un apoyo.

G: módulo de elasticidad transversal del neopreno.

n: cantidad de capas de neopreno, separadas por placas de acero, que componen un apoyo.

e: espesor de cada capa de neopreno.

Rigidez transversal de la pila.

A los efectos de analizar la posibilidad de utilizar la solución aproximada, dada en la ecuación (10), el cociente k/K se relaciona con el error cometido con respecto al resultado de la solución exacta, dada en la ecuación (5), como se verá, más adelante, en la aplicación realizada.

Es decir que dicho cociente es el parámetro a calcular inicialmente y en consecuencia resulta de interés utilizar una expresión aproximada sencilla para la rigidez transversal de la pila, K .

De acuerdo con conocimientos de Análisis de Estructuras, deberá ser:

$$n_c \frac{3EI}{L_c^3} \leq K \leq \frac{n_c 12EI}{L_c^3} \quad (12)$$

Donde:

n_c : cantidad de columnas de la pila.

I: momento de inercia de la sección transversal de una columna.

L_c : longitud de las columnas.

E: módulo de elasticidad del material.

El límite inferior de la inequación (12) corresponde al caso de viga bancada absolutamente flexible con comportamiento de las columnas tipo ménsula y el límite superior corresponde a viga bancada rígida con comportamiento de las columnas como barras empotradas en ambos extremos.

Como se verá, en el apartado siguiente, para un caso usual con tres columnas y valores diversos de I y I_c el valor de K es muy cercano al límite superior y se puede expresar en la forma:

$$K = n_c \frac{\alpha EI}{L_c^3} \quad (13)$$

Donde α es un parámetro a calibrar, de acuerdo con los resultados correspondientes del valor exacto de K , presentado en la ecuación (14).

APLICACIÓN

Se presenta la aplicación de la solución aproximada propuesta para el cálculo de la frecuencia transversal de vibración de un viaducto, considerando un caso corriente con luces de 30m, superestructura compuesta por seis vigas premoldeadas postesadas con ancho total de tablero 16.40m y pila aporcada con viga bancada y tres columnas circulares, con fundación directa. En la Figura 4 se observa la pila tipo y la sección transversal de la superestructura del caso considerado.

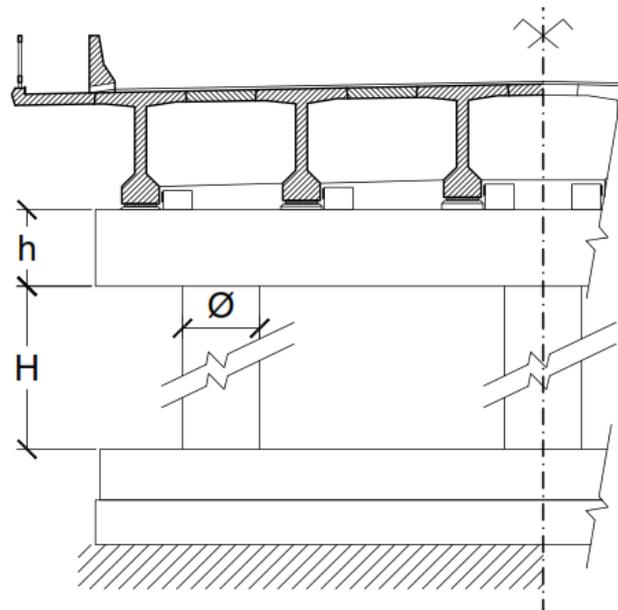


Figura 4. Caso considerado. Sección transversal, pila tipo.

Modelo matemático y rigidez transversal de la pila tipo.

En la Figura 5 se muestra el modelo matemático de la pila tipo, siendo I_v e I_c los momentos de inercia de las secciones rectas de las vigas y columnas respectivamente. Las luces consideradas corresponden a las intersecciones de los ejes de las barras y al encuentro de la columna con la viga solera. En lugar de considerar a las columnas como barras elásticas de sección uniforme en su luz libre

y luego extremos rígidos hasta los respectivos ejes de las vigas bancada y solera, se las consideró como barras elásticas de sección uniforme con la luz antedicha, desde el eje de la viga bancada hasta el borde superior de la viga bancada, lo que permite encontrar una expresión analítica para la rigidez transversal. A priori se supone al suelo de fundación con coeficiente de compresibilidad o de balasto suficientemente alto como para no considerar interacción suelo-estructura en el modelo, luego se analizará este tema.

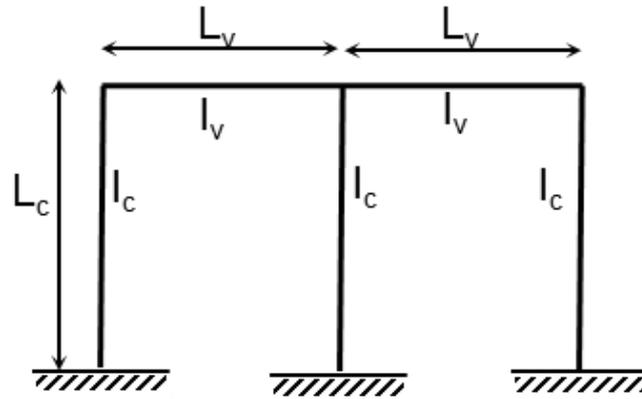


Figura 5. Modelo matemático de la pila tipo.

Aplicando conceptos clásicos de Análisis de Estructuras y despreciando deformaciones debidas a esfuerzo normal y esfuerzo de corte frente a las de flexión, resulta la siguiente expresión para la rigidez transversal de la pila tipo.

$$K = \left(2 - \frac{i_c}{1.5i_v + i_c} - \frac{i_c}{6i_v + 2i_c} \right) \frac{18EI_c}{L_c^3} \quad (14)$$

Donde:

$$i_v = \frac{I_v}{L_v} \quad (15)$$

$$i_c = \frac{I_c}{L_c} \quad (16)$$

Para los distintos casos concretos considerados más adelante el valor de K calculado con la ecuación 14 permite calcular el correspondiente valor del parámetro α de la ecuación 13. Finalmente el valor medio de este parámetro podrá ser recomendado para el empleo de dicha ecuación en pilas similares a las de los casos considerados.

Características de los materiales y de los apoyos de neopreno

En todos los casos considerados se utilizó:

Módulo de elasticidad para el hormigón, $E_b=3000$ MPa

Módulo de elasticidad transversal para el neopreno; $G=1.2$ MPa

Los apoyos de neopreno miden 25cm x 50cm, en planta y están compuestos por 5 capas de 8mm de espesor separadas por placas de acero de 1mm de espesor.

Casos considerados

Con el objeto de analizar el error relativo entre la solución aproximada y la solución exacta de las frecuencias de los modos naturales de vibración transversal y delimitar el campo de aplicación de la primera se consideraron doce casos, correspondientes a cuatro alturas libres de las columnas circulares (en metros: 4, 6, 8, 10) y tres diámetros (en cm: 80, 100, 120). La altura 4m, en general incompatible con el gálibo necesario, fue incluida para completar el espectro con un caso extremo de pila rígida.

La viga bancada es de sección recta rectangular cuyo ancho, definido por razones de espacio de los apoyos de neopreno y los extremos de las vigas, es 180cm para todos los casos y su altura es igual al diámetro de las columnas.

La masa de la superestructura, igual para todos los casos, es $4.86 \text{ kNs}^2/\text{cm}^2$

Resultados

L_c	\varnothing_c	K	α	sol exacta		sol aprox.		Error rel.	
				ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ϵ_1	ϵ_2
				1/seg	1/seg	1/seg	1/seg	%	%
440	80	228.07	10.74	7.85	69.25	8.60	63.21	10	9
640	80	76.54	11.09	6.78	45.03	8.60	35.49	27	21
840	80	34.46	11.29	5.57	35.72	8.60	23.12	54	35
1040	80	18.36	11.41	4.50	31.36	8.60	16.41	91	48
450	100	509.30	10.51	8.24	86.48	8.60	82.86	4	4
650	100	175.44	10.91	7.65	52.66	8.60	46.85	12	11
850	100	80.11	11.14	6.82	38.56	8.60	30.57	26	21
1050	100	43.08	11.29	5.90	31.66	8.60	21.70	46	31
460	120	969.13	10.30	8.41	104.70	8.60	102.33	2	2
660	120	342.11	10.74	8.08	62.03	8.60	58.24	6	6
860	120	158.36	11.00	7.56	43.36	8.60	38.09	14	12
1060	120	85.89	11.17	6.89	33.78	8.60	27.04	25	20

Tabla 6. Resultados de los doce casos.

L_c : luz de las columnas, como se definió en el modelo matemático

\varnothing_c : diámetro de las columnas.

α : parámetro definido en la ecuación (13).

K: rigidez transversal de la pila, calculada con la ecuación (14).

k: rigidez transversal de los apoyos de neopreno, calculada con la ecuación (11), siendo $N=2 \times 6=12$, (dos semiluces con seis apoyos cada una)

ω_1, ω_2 : frecuencias circulares del primer y segundo modo natural respectivamente.

Sol. Exacta: valores de ω_1 y ω_2 obtenidos con la ecuación (5)

Sol. Aproximada: valores de ω_1 y ω_2 calculados con las ecuaciones (8) y (9).

ϵ_1, ϵ_2 : errores relativos de la solución aproximada.

La solución aproximada da valores de ω_1 por exceso y en consecuencia resulta del lado de la seguridad para el cálculo de la acción sísmica. De acuerdo con esto y con las incertidumbres involucradas en la determinación de dicha acción se consideraron admisibles las soluciones aproximadas para ω_1 con error relativo $\epsilon_1 \leq 15\%$.

H(cm)/ \varnothing_c (cm)	80	100	120
400	10%	4%	2%
600	27%	12%	6%
800	54%	26%	14%
1000	91%	46%	25%

Tabla 7. Valores de ϵ_1 en función del diámetro y la luz libre (H) de las columnas.

En la Tabla 7, construida de acuerdo con los valores de la Tabla 6, se encuentran los valores de ϵ_1 en función del diámetro y la luz de las columnas, destacando los casos admisibles. Se observa como a medida que el diámetro crece aumenta el conjunto de luces que conforman casos admisibles, debido a que se consiguen pilas de rigidez relativa importante con respecto a la de los apoyos de neopreno.

Debido a que en zonas de sismicidad importante es de esperar diseños con el mayor de los diámetros considerados, se observa que la solución aproximada tiene un rango amplio de aplicación, tres de las cuatro alturas consideradas.

Influencia de la viga solera y del suelo de fundación

Con el objeto de analizar la incidencia en los valores de las frecuencias naturales de las deformaciones de la viga solera y del suelo de fundación, no tenidos en cuenta en la ecuación (5), se implementó el modelo matemático, para aplicar elementos finitos representado en la Figura 8, en la cual se indica la sección recta de la viga de fundación.

Las columnas se consideraron como barras elásticas de acuerdo con su diámetro y material en su luz libre y con extremos rígidos hasta los respectivos ejes baricéntricos de la viga bancada y la viga solera.

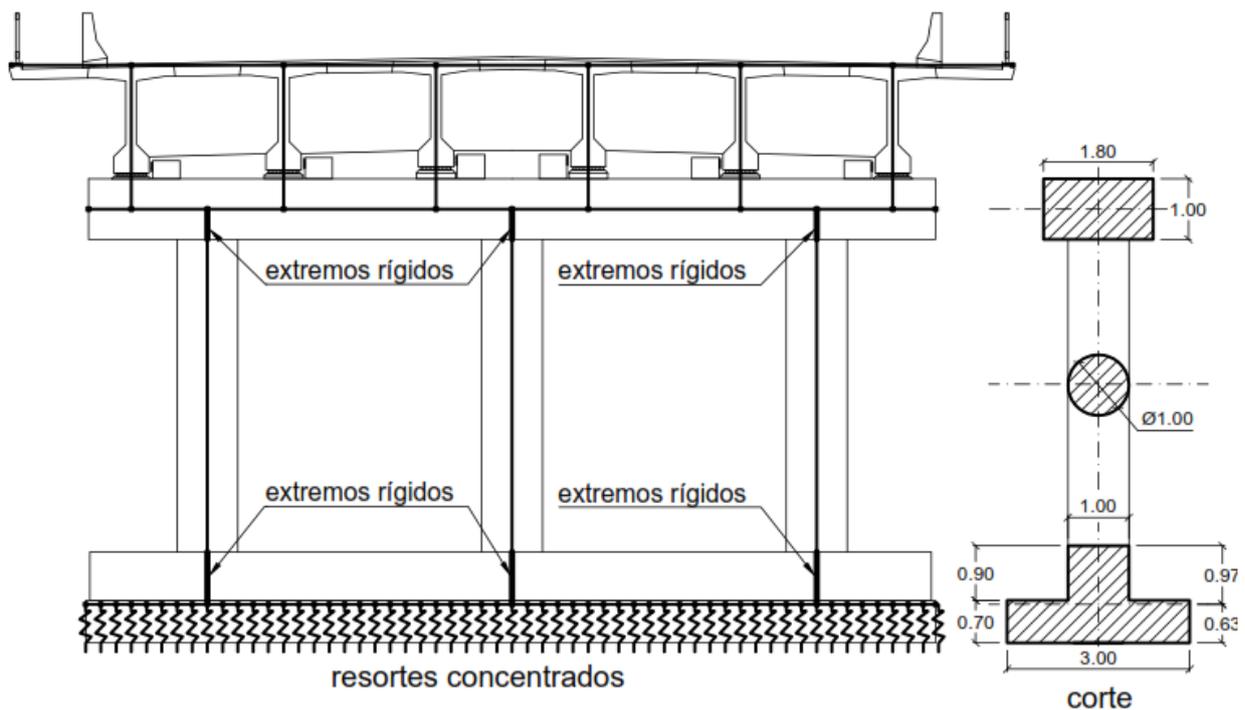


Figura 8. Modelo matemático para aplicar Elementos Finitos.

Se consideraron dos valores para el coeficiente de compresibilidad, o de balasto, del suelo: $C=5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ y $C=10 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$, cuyo efecto se simuló mediante un conjunto discreto de resortes.

Para comparar los resultados obtenidos con los de la denominada solución exacta, de la ecuación (5) empleada en la Tabla 6, se eligió el caso $\varnothing_c = 1.00 \text{ m}$ con el conjunto de luces consideradas.

En la Tabla 9 se encuentran los resultados respectivos junto a los de la “solución exacta” de la ecuación (5), para facilitar la comparación. Para $C= 15 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ los valores de ω_1 son muy similares, por exceso con respecto a los de la ecuación (5), lo que indica que prevalece el efecto de la inclusión de extremos rígidos para la columnas frente al efecto de la deformabilidad de la viga solera y del suelo. Ocurre lo contrario para $C=5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ con valores que siguen siendo muy similares a la ecuación (5), aunque con mayores diferencias. En consecuencia queda validado el empleo de dicha ecuación en la Tabla 6.

Es de esperar que para valores sensiblemente más bajos del coeficiente de compresibilidad recién se haga necesario incluir los efectos de la deformación del suelo y de la viga de fundación, pero esos valores corresponderán a suelos que aconsejan fundación indirecta, caso no tratado en este trabajo.

L _c	Ø _c	Sol. exacta		EF- C=15 - Ex. Rig		EF- C=5 - Ex. Rig	
		ω ₁	ω ₂	ω ₁	ω ₂	ω ₁	ω ₂
cm	cm	1/seg	1/seg	1/seg	1/seg	1/seg	1/seg
450	100	8.24	86.48	8.23	68.04	8.13	46.26
650	100	7.65	52.66	7.68	53.81	7.52	43.15
850	100	6.82	38.56	6.87	40.63	6.69	37.10
1050	100	5.90	31.66	5.97	33.53	5.79	32.17

Tabla 9. Influencia de la deformación del suelo y de la viga de fundación.

Sol. exacta: solución correspondiente a la ecuación 5

EF- C=15 – Ex. Rig.: Solución con elementos finitos, $C = 15 \cdot 10^4 \text{ KN/m}^3$ y columnas con extremos rígidos

EF- C=5 – Ex. Rig.: Solución con elementos finitos, $C = 5 \cdot 10^4 \text{ KN/m}^3$ y columnas con extremos rígidos

Campo de aplicación de la solución aproximada.

De acuerdo con los valores del parámetro α obtenidos en los doce casos considerados, que se encuentran en la tabla n° 6, resulta un valor medio:

$$\alpha_{\text{prom.}} = 11 \quad (17)$$

Por otra parte en dicha tabla se observa que los valores de la solución aproximada considerados admisibles están en correspondencia con relaciones de rigideces entre apoyos de neopreno y pila (k/K) con valor inferior a 0.30. En consecuencia se puede recomendar este valor para determinar el campo de aplicación de la solución aproximada.

Luego frente a un caso genérico se calcula k, aplicando la ecuación (11), K con la ecuación (13) y el valor para α de la ecuación (17) y si el cociente k/K resulta menor o igual a 0.30 se podrá utilizar para él cálculo del período fundamental de vibración transversal la ecuación (10).

CONCLUSIONES.

Se ha considerado el cálculo del período fundamental de vibración, en dirección transversal, para el módulo tipo de un viaducto, con tablero apoyado mediante apoyos de neopreno en pilas aporticadas.

Empleando un modelo matemático tipo péndulo invertido con dos grados de libertad, correspondientes al desplazamiento de la superestructura y de la viga bancada, se logró deducir una expresión aproximada sencilla para el cálculo de dicho período fundamental. La aplicación a un ejemplo permitió encontrar un modo eficaz de establecer, para en caso concreto, si la solución aproximada se puede aplicar con un error aceptable.

Por otra parte, cuando la solución propuesta es válida resulta útil para su aplicación a la totalidad de los tramos del puente, incluyendo los extremos, toda vez que se puedan considerar a los estribos con rigidez transversal igual o mayor que la de las pilas.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Universidad Nacional de Rosario y al Instituto Nacional de Prevención Sísmica, por el apoyo recibido para la realización de este trabajo.

Referencias

1. Priestley, M.J.N.; Seible F.; Calvi G.M.; "Seismic Design and Retrofit of Bridges", John Wiley and Sons, Inc., 1996.
2. Clough, R.W.; Penzien, J.; "Dynamics of Structures", Mc Graw – Hill, 1975.
3. Chopra, A.K.; "Dynamics of structures", Prentice Hall, 1995.