

TÉCNICA PARA LA VERIFICACIÓN DEL MECANISMO DE COLAPSO DE ESTRUCTURAS

Ingeniero Civil Patricia CUADROS
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de San Juan.
San Juan- Argentina

Profesor Dpto. Matemática Fac. Ingeniería. Alumna Maestría en Ingeniería de Estructuras Sismorresistentes, tesis "Determinación del mecanismo de colapso de estructuras" en proceso de evaluación. Profesional independiente con numerosos trabajos de cálculo de estructuras, antigüedad de 20 años en la profesión.

Ph. D. Ingeniero Civil Carlos E. SEGUIN
Facultad de Ingeniería – Univ. Nac. de San Juan
San Juan - Argentina

Profesor Dpto. Ingeniería Civil Fac. de Ingeniería. Investigador categorizado de vasta experiencia en ingeniería estructural. Jefe Área Terreno SIRVE S. A. Santiago – República de Chile

Resumen.

La determinación del factor de seguridad con respecto al colapso y la identificación del mecanismo de colapso de una estructura sometida a acciones sísmicas severas representan elementos fundamentales para lograr el diseño óptimo de ella. Los reglamentos de diseño sismorresistente definen criterios de comportamiento que la estructura debe cumplir. Algunos postulan un mecanismo de colapso a priori, otros dejan en manos del diseñador su elección. En ambos casos existe incertidumbre en cuanto a que la estructura verifique el mecanismo de colapso adoptado. Ante esto las metodologías de análisis que permiten determinar el mecanismo de colapso real para un estado de cargas dado cobran importancia. Este trabajo presenta un método de identificación y verificación del mecanismo de colapso de una estructura asociada a un estado de cargas sísmicas, mediante la aplicación de programación lineal. Se implementa el Método Simplex al proceso de búsqueda del mecanismo de colapso de pórticos planos y obtención del factor de seguridad último de la estructura. Se toman como variables los momentos flectores y esfuerzos normales de diseño durante el proceso de optimización. A partir de un algoritmo de resolución y en base a los mecanismos de colapso simples, se obtiene el mecanismo de colapso real de la estructura para un estado de cargas dado. Este método permite asegurar que todas las rótulas plásticas se han producido cuando se desarrolla en mecanismo de colapso.

Summary.

The determination of the factor of security with respect to the collapse and the identification of the collapse mechanism of a structure subjected to severe seismic actions represents fundamental elements to obtain the optimal design of the same one. The regulations of design sismorresistente define criteria of behavior that the

structure should complete. Some postulate a collapse mechanism a priori, others leave in the designer's hands their election. In both cases the uncertainty exists as for that the structure verifies the mechanism of collapse adopted. Before this the analysis methodologies that allow to determine the mechanism of real collapse for a given state of loads receive a fundamental importance. This work presents an method analysis and identification of the mechanism of collapse of a structure associated to a state of seismic loads given, by means of the application of lineal programming. With this objective the Method Simplex is implemented to the process of search of the mechanism of collapse of plane frames and obtaining of the last factor of security of the structure. They take in this study as design variables the moments flectores and normal efforts variables during the process of optimization. Starting from a algorithm resolution and based on the simple collapse mechanisms, the mechanism of real collapse of the structure is obtained for a given state of loads, being this the main objective of the work. This method allows to assure that all the plastic kneecaps have taken place when it is developed in collapse mechanism.

INTRODUCCIÓN

El capítulo 3 de la Norma Argentina INPRES-CIRSOC 103 y el artículo 2.11 del Proyecto de modificación de la misma de Julio de 2000^{1,2,3}, a efectos del diseño sísmico de una estructura, establecen que el diseñador debe asumir, dentro de los requisitos generales de diseño, un mecanismo de colapso global. Sin embargo es un hecho bien conocido que no es posible asegurar la ocurrencia de un mecanismo de colapso a priori. Por otra parte el diseño debe establecer las características de la estructura que permitan lograr el mejor comportamiento posible, lo cual implica, entre otras cosas, establecer un adecuado mecanismo de falla. El diseño por capacidad⁴ ha significado un importante avance en este sentido, sentando las bases del diseño sísmico, sin embargo establece la adopción, por parte del diseñador de un mecanismo de colapso a priori. En ingeniería estructural se encuentran poco desarrollados métodos o técnicas de trabajo que permitan al profesional verificar el mecanismo de colapso adoptado para el diseño de una estructura.

Numerosos estudios sobre optimización estructural^{5,6,7,8} en el diseño sísmico de una estructura se han publicado en las dos décadas pasadas. La optimización del diseño estructural se ha comprendido como la minimización del peso estructural. Esta metodología no ha logrado demasiada difusión, principalmente porque su aplicación es muy laboriosa y la estructura que se obtiene es difícil de materializar. Sin embargo el diseño estructural óptimo también puede entenderse como aquel que está basado en una respuesta estructural predecible y controlable en el rango no lineal, minimizando las incertidumbres frente a la acción sísmica.

El presente trabajo muestra una metodología que permite verificar la ocurrencia del mecanismo de colapso real para el diseño confiable de una estructura. La obtención detallada del mismo es un paso posterior al diseño de la estructura y cálculo de solicitaciones.

Para lograr el objetivo propuesto se usa programación lineal, siendo muy aceptada en la práctica profesional por su simplicidad y fácil aplicación y comprensión. En este sentido se implementa un algoritmo sencillo tal como el Método Simplex al proceso de búsqueda del mecanismo de colapso de pórticos planos, dado que se observa que el planteo del problema conduce a la forma estándar de este método de programación lineal.

La dificultad principal para la aplicación de conceptos de optimización es la definición de las variables a optimizar o variables de decisión x_i , de la función objetivo a maximizar o minimizar y del sistema de restricciones, o grupo de condiciones restrictivas. La función objetivo es una representación matemática del mecanismo de colapso formulada en función de las variables de decisión x_i , que en el caso general representan los momentos M_i y los esfuerzos normales N_i , de la estructura, satisfaciendo al mismo tiempo un grupo de restricciones, que están dados por las solicitaciones de plastificación inicial de la estructura. Las restricciones de un problema de programación lineal pueden representarse con desigualdades de tipo $\leq$ y/o $\geq$, en este caso las combinaciones M_i y N_i menores o iguales a los valores de plastificación. Las restricciones definen una región limitada por un conjunto poliédrico convexo.

El proceso comienza asumiendo un mecanismo de colapso a priori, a partir de este se calcula la estructura aplicando las prescripciones de la norma. Luego con base en los mecanismos de colapso simples determinamos el mecanismo de colapso global para el estado de cargas máximas establecido en la norma. En la Figura 1 resumimos el proceso que se sigue, haciendo uso del método Simplex, se verifica si se cumple con el mecanismo inicial, o sea comprobar que las solicitaciones se corresponden con el diagrama de momentos estáticamente admisible; si esto no ocurre se asume el último mecanismo de colapso obtenido, a partir de este punto el proceso es iterativo hasta alcanzar al diseño óptimo de la estructura.

Este planteo se aparta notablemente de la idea de considerar resuelto el problema cuando se realiza el "cálculo" de la estructura para las acciones previstas en el Código.

En estructuras hiperestáticas, la capacidad portante a menudo dista mucho de estar agotada cuando en una sección se alcanza la fluencia del acero. Se deben evitar que ocurran fallas frágiles en la estructura, este tipo de comportamiento implica pérdidas totales de resistencia, en el hormigón armado involucra generalmente desintegración del hormigón. Los criterios de dimensionamiento actuales para una determinada distribución de esfuerzos característicos no conducen, en consecuencia, a una noción exacta de la seguridad de la estructura.

Para poder aplicar el Método Simplex nos propusimos adaptarlo, desarrollando procedimientos de cambio de variables para transformar el modelo del pórtico plano en uno que se corresponde con la forma directa de este método y lograr un proceso de identificación de mecanismo de colapso sencillo de aplicar al realizar el diseño del pórtico aún cuando el análisis detallado sobre estructuras importantes pueda resultar muy laborioso manualmente.

Se presenta un programa empleando este método en plataforma MATLAB, y un ejemplo de un pórtico para ilustrar la efectividad y viabilidad del método de identificación y verificación del mecanismo de colapso propuesto.

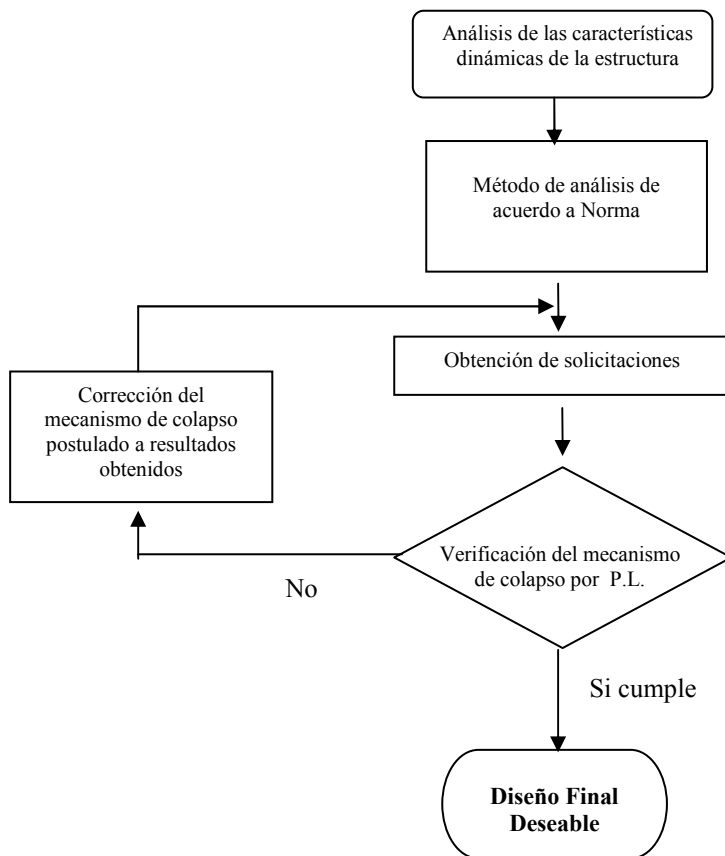


Figura 1- Proceso de optimización usado

CONCEPTOS BÁSICOS

Definimos el **mecanismo cinemático de colapso** como aquel en que la estructura posee un número suficiente y en la posición adecuada de rótulas plásticas, que originan un sistema lábil, donde el equilibrio ya no es posible bajo ninguna circunstancia. Estado en el que las deformaciones del pórtico pueden continuar aumentando mientras las cargas externas permanecen constantes. Este mecanismo puede, o no, ser el que realmente produce el colapso total de la estructura.

En la Figura 2 se grafica la hipótesis básica de los métodos de análisis plásticos para flexión, en ella se muestra la relación entre el momento flector M y la curvatura ϕ , que es válida para cualquier sección transversal de un elemento típico de un pórtico de acero, a), y las curvas idealizadas para una sección de hormigón simplemente armada. El valor límite del momento es el denominado **momento plástico o de plastificación M_p** .

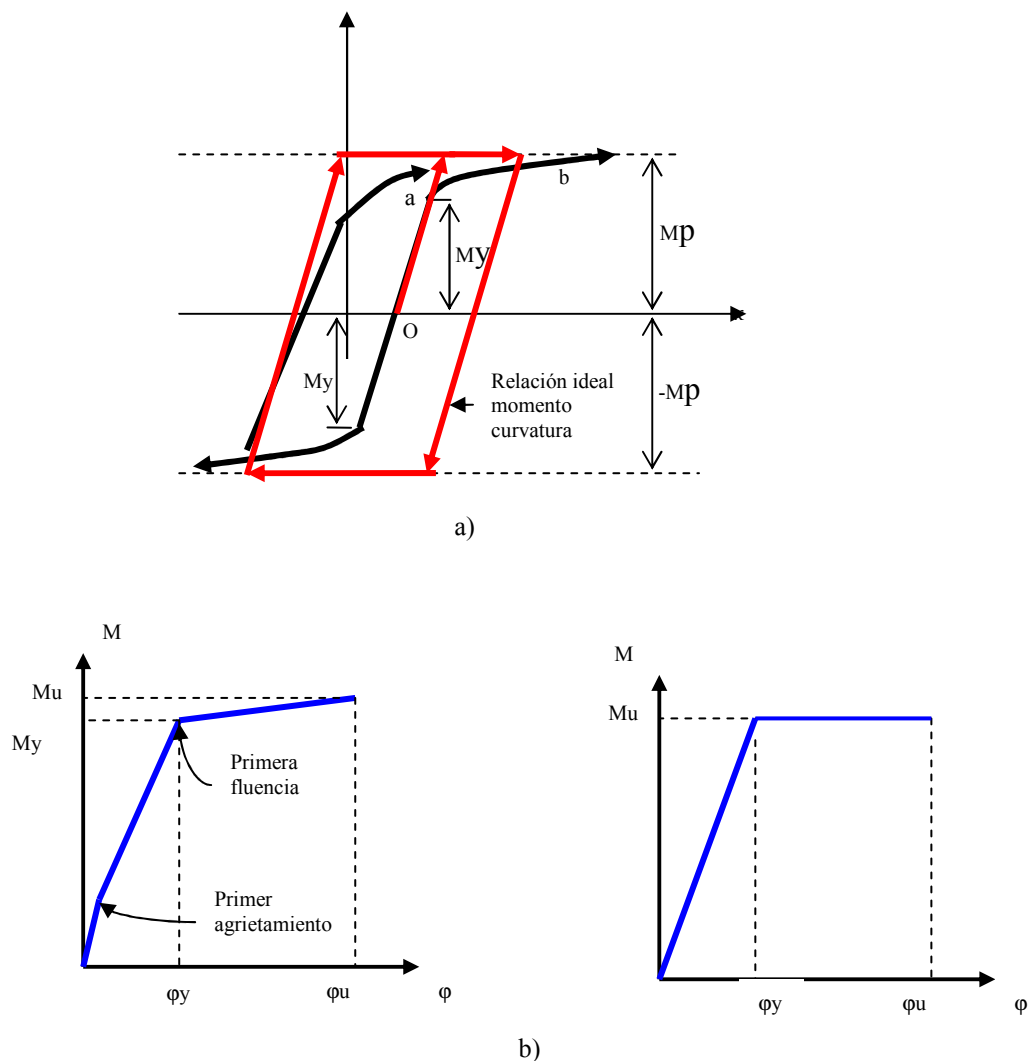


Figura 2. Relación momento flector-curvatura, a) para una sección de acero, b) para una sección de hormigón

Los dos rasgos fundamentalmente importantes de este tipo de relación son que un incremento de momento flector siempre causa un incremento de curvatura del mismo signo, y que la magnitud de la curvatura tiende a ser indefinidamente grande cuando la magnitud del momento flector tiende a su valor límite M_p .

Cuando en una sección de un elemento del pórtico el momento alcanza el valor M_p , esta plastifica y la curvatura se incrementa rápidamente manteniendo el valor de M constante, mientras que otras secciones, con magnitud de M menor que M_p , se mantienen elásticas y su curvatura es pequeña comparada con la que plastifico. Se describe el comportamiento de la sección con $M = M_p$ como con una **rótula o articulación plástica** que admite una rotación de cualquier magnitud mientras el valor del momento permanece constante. La magnitud real de la rotación en la rótula en cualquier caso, está determinada por la rigidez que presente el resto de la estructura a los cambios de carga, mientras la acción de la rótula se esta desarrollando. Si el valor del momento se reduce por debajo de M_p , se produce la

descarga elástica y la rotación de la rótula en sentido contrario, lo que disminuye el valor de la rotación total.

Si analizamos el comportamiento de las rótulas desde el punto de vista de su capacidad de rotación, encontramos que las mismas están limitadas según el material. Si es acero, las articulaciones tienen gran posibilidad de rotación debido a la ductilidad de este material, aunque el pandeo local condiciona esta posibilidad. Si es hormigón armado sus posibilidades de rotación se ven más restringidas debido al comportamiento del hormigón, dependiendo de las cuantías de las armaduras, de la resistencia del hormigón y del esfuerzo de compresión al que está sometida la zona de la rótula.

Una hipótesis básica, para una sección de un material elastoplástico ideal, es que en cualquier sección de un elemento del pórtico, el valor del momento M debe variar entre $-M_p$ y M_p :

$$-M_p \leq M \leq M_p \quad (1)$$

En el caso del hormigón armado, en general: $|M_p| \neq -M_p$

TEOREMAS BÁSICOS DEL DISEÑO ÓPTIMO

El análisis al estado límite de la estructura puede realizarse aplicando dos clásicos teoremas, el estático o teorema del límite inferior y el cinemático o teorema del límite superior, ambos desarrollados alrededor del año 1950^{9,10}.

El diseño de una estructura real excepcionalmente se lleva a cabo con la aplicación directa de estos teoremas, por lo engorroso que resulta su uso salvo para pequeñas estructuras, en general se tiende a adoptar otros métodos. En estructuras simples es obvia la existencia de un solo mecanismo de colapso posible y en esos casos el cálculo del multiplicador de colapso, f , no presenta dificultades. Pero cuando existe más de un mecanismo de colapso posible, se hace necesario encontrar el mecanismo de colapso real de la estructura y el correspondiente multiplicador de colapso, que es el mínimo de todos los mecanismos posibles. Esto representaría la aplicación de los teoremas a cada posible mecanismo, lo que no hace viable este camino de solución.

El teorema estático requiere maximizar un factor entre la carga real y la correspondiente al mecanismo de colapso, satisfaciendo las condiciones de equilibrio y de fluencia. Permite encontrar un factor de carga denominado factor estático, que acota inferiormente al multiplicador de colapso de la estructura. Es de hacer notar que tanto la función a usar para maximizar el factor de carga, como las condiciones de equilibrio son expresiones de tipo lineal, por lo que la naturaleza de las condiciones de fluencia que se adopten determinan el tipo de problema de programación matemática a plantearse.

El teorema cinemático permite determinar un factor de carga, denominado factor cinemático, que acota superiormente al multiplicador de colapso de la estructura, aplicando el Principio de los Trabajos. Virtuales.

La validez de aplicación de los teoremas depende esencialmente de la relación momento-curvatura asumida para cada elemento del pórtico, siendo para este estudio la clásica bilineal, indicada en la Figura 2, que admite la aplicación de ambos teoremas.

Asumiremos que el valor de M_p es una constante definida para cada elemento del pórtico dado, sin considerar los valores de las fuerzas axiales y de corte. Como el método de cálculo se basa en la capacidad de rotación, es imprescindible que dicha capacidad esté asegurada para permitir una correcta redistribución plástica de los esfuerzos, por lo que las secciones se diseñan para evitar una falla frágil, con el refuerzo de armadura transversal necesario.

Puede demostrarse que durante el desarrollo del mecanismo de colapso la distribución de momento flector del pórtico permanece inalterada con el aumento de las deformaciones. Los aumentos de deformaciones durante el colapso deben ser por consiguiente debidos solamente a las rotaciones en las rótulas plásticas, y estas rótulas plásticas deben formarse en un número suficiente de secciones para desarrollar en la estructura un mecanismo, en el resto de las secciones el valor de la deformación no se altera, por ende tampoco el diagrama de momentos. Resulta evidente que una vez formado el mecanismo de colapso, el trabajo hecho por las cargas externas debe ser igual al trabajo disipado en las rótulas plásticas. Esto último se deduce del hecho que durante el colapso no hay cambio de curvatura en una sección cualquiera salvo aquéllas en que existen rótulas plásticas esto es no hay trabajo interior de los momentos flectores excepto en las rótulas.

La combinación de los teoremas estático y cinemático forman un teorema de singularidad. Así se sabe del teorema estático que para cualquier valor de carga P sobre la carga de colapso P_c , es imposible encontrar una distribución de momento flector que sea estáticamente admisible. Por otra parte el teorema cinemático expresa que es imposible encontrar un mecanismo cualquiera en que la carga correspondiente sea menor de P_c . Combinando estos resultados, puede enunciarse el teorema como sigue: si para un pórtico dado y cargado externamente puede encontrarse por lo menos una distribución de momento flector estáticamente admisible, y el momento flector es igual al momento plástico en suficientes secciones transversales para formar un mecanismo debido a las rotaciones de las rótulas plásticas en esas secciones, la carga correspondiente deberá ser igual a la carga de colapso P_p .

Este teorema lo demostró Horne (1950), su valor radica en que si se piensa que el mecanismo de colapso real es conocido, la confirmación del mismo puede obtenerse en seguida por la construcción del diagrama de momento flector correspondiente. Es de interés notar que Drucker, Prager y Greenberg lo demostraron para el caso general de cuerpos sólidos compuestos por material cuyas relaciones tensión-deformación son generalizaciones apropiadas de la relación plástica ideal de la figura 2.

Para una estructura dada y cargada, la ecuación de equilibrio siempre puede obtenerse por la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, asumiendo un movimiento apropiado y pequeño de las rótulas, y que los momentos que actúan en las rótulas están en equilibrio estático con las cargas. Las rótulas no se consideran así como rótulas plásticas, pero se supone que ocurren para hacer posible un movimiento imaginario y pequeño de la estructura mientras el equilibrio se mantiene. Si las posiciones de las rótulas se escogen iguales que aquéllas de los posibles mecanismos de colapso que analizamos por la teoría plástica, las ecuaciones de equilibrio obtenidas precisamente serán aquéllas que corresponden a éstos mecanismos.

Una ecuación de trabajo para determinar el valor de P que corresponde a un mecanismo supuesto puede considerarse como realizar dos pasos en uno. El

primero de estos pasos es establecer una ecuación de equilibrio por el Principio de los Trabajos Virtuales, y el segundo es insertar en esta ecuación esos valores de momentos plásticos que aumentan al máximo la carga. Interpretado de esta manera, está claro que escribiendo una ecuación de trabajo el valor de la carga de colapso que se obtiene es idéntico al que se encuentra aplicando un análisis estático. En este caso se debe prestar especial atención a los sentidos (signos) de rotación de las rótulas, esto es porque físicamente el trabajo absorbido por la rótula plástica debe ser siempre positivo

IDENTIFICACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL MECANISMO DE COLAPSO

Formulación para pórticos solicitados a flexión

El problema estructural que se nos plantea es ¿Con qué carga colapsa una estructura? ¿Cuál es el máximo multiplicador de colapso f ?

Analizando el pórtico de la Figura 3, se observa que el diagrama de momentos es el de colapso si es f el multiplicador máximo estáticamente admisible. Las ecuaciones asociadas a los mecanismos de colapso simples son:

$$M_1 + M_2 + M_4 + M_5 = f Q h \quad \text{con} \quad M_i = \text{momento flector} \quad (2)$$

$$-M_2 + 2 M_3 + M_4 = f P L / 2 \quad (3)$$

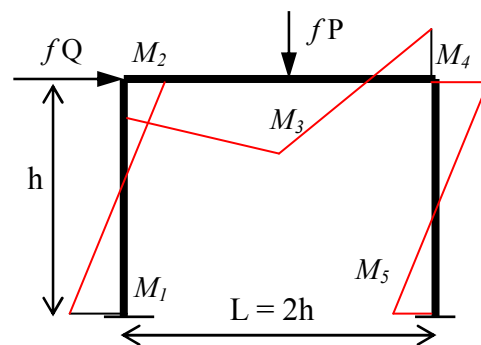


Figura 3: Pórtico simple- Cargas aplicadas – Diagrama de momentos flectores

Siendo $P=Q=F$ y $L = 2 h$.

Las ecuaciones de la estática se plantean en base a los mecanismos simples, esto genera un set de ecuaciones independientes. La mejor manera de encontrar la solución es plantearlas asociadas a un grado de libertad.

Por superposición de (2) y (3) obtenemos:

$$2 F L f = M_1 + 2 M_3 + 2 M_4 + M_5 \quad (4)$$

$$We f = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (5)$$

De acuerdo con la relación momento curvatura adoptada, Figura 2, tenemos como restricciones

$$Mp_i^- \leq M_i \leq Mp_i^+ \quad (6)$$

Este planteo conduce a un diseño óptimo y por ser todas las ecuaciones de primer orden, a un método de programación lineal. Elegimos el Método Simplex.

Como es bien conocido un problema de optimización se plantea como:

$$\text{maximizar } Z = c^T x \quad (7)$$

$$\text{Sujeta a las restricciones: } Ax \leq b \quad (8)$$

$$\text{Con } x \geq 0, \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad b \geq 0 \quad (9)$$

para un modelo que tiene n variables de decisión y m inecuaciones de restricción.

siendo **A** una matriz de coeficientes de las restricciones de $m \times n$,

c un vector de coeficientes de la función objetivo de $n \times 1$, que representan los pesos de la variable x .

x un vector de variables de decisión de $n \times 1$,

b un vector de términos independientes de las restricciones de $m \times 1$

Hipótesis del método:

$$b \geq 0 \Rightarrow b_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m \quad (10)$$

$$m < n, \quad m = \text{rango}(\mathbf{A}) \quad (11)$$

Hay que hacer notar que el método selecciona el cambio más adecuado a hacer en cada iteración sin necesidad de información sobre las pasadas o próximas iteraciones.

El sistema de restricciones representa un poliedro en $\mathcal{R}^n$, un conjunto convexo cuyos vértices o puntos extremos son posibles valores óptimos de la función objetivo. En el caso de los planteos dentro de la ingeniería estructural siempre se verifica que el poliedro es cerrado y no vacío, ya que representa un diagrama de interacción.

El método es una rutina especial para resolver sistemas de ecuaciones lineales, es preciso formular las restricciones como ecuaciones, añadiéndoles a cada desigualdad una variable de holgura, que cumple la función de equilibrar ambos miembros de la ecuación. Se convierten en variables adicionales del problema, que tienen una interpretación física importante, porque en los puntos en que hay rótulas plásticas la variable de holgura toma valor cero.

Como se observa de las ecuaciones (6), nuestro planteo no es un problema estándar de acuerdo con las especificaciones del Método Simplex. Hay que recurrir a algunas alternativas como ser una transformación de variables:

$$y_i = M_i + Mp_i \quad (12)$$

donde y_i debe ser positivo y en valor absoluto menor que Mp^- (valor negativo de momento de plastificación),

Desde el punto de vista estructural se puede hacer porque lo que interesa es el corrimiento que se produce de los valores, para transformar en la forma estándar. El conjunto de restricciones queda expresado como

$$y_i \leq 2 M p_i \quad (13)$$

En la función objetivo se debe aplicar el mismo cambio de variables.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{y} + \mathbf{c}^T \mathbf{M} \mathbf{p} - W e f = 0 \quad (14)$$

siendo:

$\mathbf{c}$ = vector de coeficientes de la función

$\mathbf{y}$ = vector de variables

a través del Método Simplex se maximiza $z = \mathbf{c}^T \mathbf{y}$, por lo que se puede expresar como resultado del mismo que:

$$\frac{z \max + \mathbf{c}^T \mathbf{M} \mathbf{p}}{W e} = f \quad (15)$$

Luego de adaptadas la función objetivo y las restricciones, aplicando el Método Simplex, se obtiene f y los momentos de un diagrama estáticamente admisible, excepto en las zonas donde la estructura tenga rótulas plásticas. El método entrega los valores de holgura, donde existan rótulas plásticas tendrán asociadas variables de holgura nulas. Hay puntos donde existe plastificación, pero sin embargo no son rótulas del mecanismo de colapso, entonces se puede presentar mayor número de puntos con holgura cero que rótulas.

Formulación para pórticos solicitados por flexión y esfuerzo normal

El concepto de la formación y de la rotación indefinida de una rótula plástica en un elemento, manteniendo constante el valor de M_p es de importancia fundamental en la teoría plástica. De hecho, la simplicidad de los métodos plásticos de análisis se debe a este concepto. Debe reconocerse, sin embargo, que el M_p de un elemento dado no es una cantidad definida, constante. Considerando que $M_p = W_p \sigma_y$, donde W_p es el módulo resistente y σ_y es la tensión de fluencia, el valor de M_p depende de la forma y tamaño de la sección y de la tensión de fluencia. La tensión de fluencia es dependiente del esquema de carga y de la historia de carga anterior de la estructura. Así una variación en la tensión de fluencia ocasiona una variación en el valor de M_p , efecto que se conoce como efecto Bauschinger y que afecta tanto en estructuras de acero como de hormigón.

El reglamento argentino INPRES-CIRSOC 103, Parte II, año 2000, establece en el artículo 1.5. como método de diseño al denominado diseño por capacidad. Entre las características principales de este procedimiento se encuentra que se inhiben, en los elementos que tienen rótulas plásticas, los modos indeseables de deformación inelástica, tales como los que podrían originarse por fallas de corte o anclaje e inestabilidad, asegurando que la resistencia de estos modos sea mayor que la de las rótulas plásticas cuando estas desarrollan su sobrerresistencia flexional (capacidad).

Tomamos como ejemplo un pórtico plano empotrado en sus bases, con todos los miembros del pórtico uniformes, con igual sección transversal y material, asumiendo un comportamiento elastoplástico ideal sin endurecimiento por deformación, Figura 2, con un momento plástico de magnitud M_p en todas las rótulas potenciales.

Considerando elemento a aquel que se encuentra definido entre dos nudos. Se numeran los nudos de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha, de forma similar los elementos. No se distinguen, al numerar, vigas de columnas. Siendo M_{ij} el momento flector con i = número de elemento, j = número de nudo. No se consideran los esfuerzos axiales en la viga.

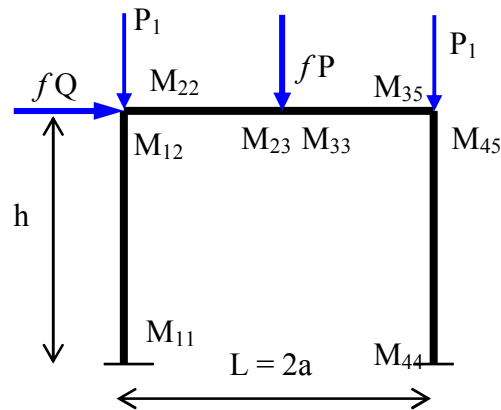


Figura 4. Pórtico solicitado por momento flector y esfuerzo normal

La forma de graficar las combinaciones de M-N que provocan la falla en una sección dada de columna es mediante un **diagrama de interacción**, figura 5, el mismo se supone conocido para este caso. Delimita la región “posible” de carga de la “imposible” de alcanzar. En la zona de la curva el material ingresa en fluencia a fin de impedir que la misma sea atravesada. Podemos, en el caso de perfiles laminados, aproximar la curva por rectas, en este caso la aproximación resulta muy razonable. Definimos el diagrama en forma paramétrica mediante la expresión:

$$\begin{aligned} -1 \leq \nu N - \mu M \leq 1 \\ -1 \leq \nu N + \mu M \leq 1 \end{aligned} \quad \text{donde los parámetros son: } \mu = \frac{1}{1,18 M_p}, \quad \nu = \frac{1}{N_p} \quad (16)$$

Por convención consideramos aquí que la compresión es positiva y la tracción es negativa. Cada diagrama corresponde a un tipo de acero.

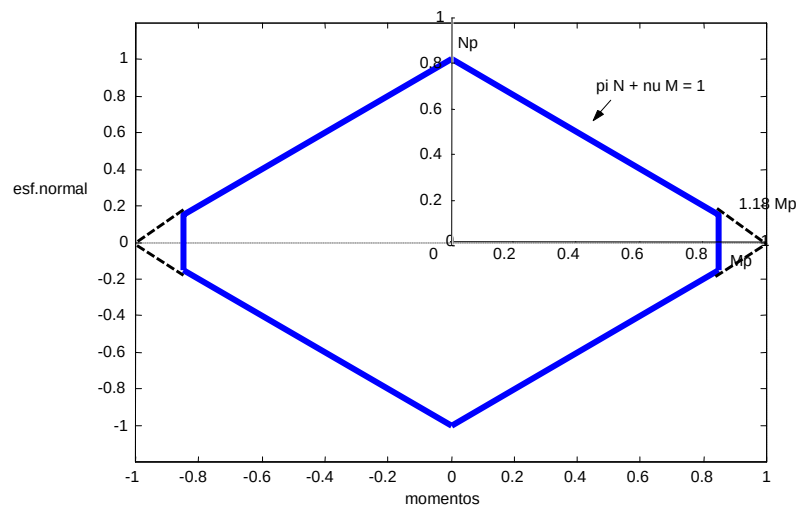


Figura 5. Diagrama de interacción para elementos

Para el caso de elementos de hormigón armado la curva del diagrama de interacción es convexa, podemos resolver el problema que se presenta reemplazándola por una serie de tangentes, salvo en pequeñas zonas correspondientes al entorno de las intersecciones con el eje vertical, que se denominan zonas no seguras, Figura 6. Esta serie de tangentes implica que aparecen más condiciones en el caso de columnas. En el cuaderno 240 DIN 1045 – tablas de flexo-compresión desviada aparecen diagramas de interacción con curvas no convexas, pero esto es porque corresponden a criterios de diseño no de comportamiento. La condición puede expresarse como:

$$-1 \leq \nu N \pm \mu \cos \alpha M \leq 1 \quad (17)$$

Continuando con el análisis del diagrama planteado para nuestro problema, haciendo la $\frac{dN}{dM}$ obtenemos la pendiente de un segmento del poliedro (diagrama).

Cuando la estructura llega a la fluencia las distintas combinaciones de M-N siguen los segmentos lineales.

Podemos observar que cuando el punto definido por los valores obtenidos cae fuera del diagrama de interacción implica que no es una zona posible de carga, la pieza ha entrado en fluencia, se debería recalcularla, cambiando su sección o en caso de ser hormigón armado y de mantener las dimensiones aumentar su cuantía, contemplando las limitaciones para no provocar una falla frágil.

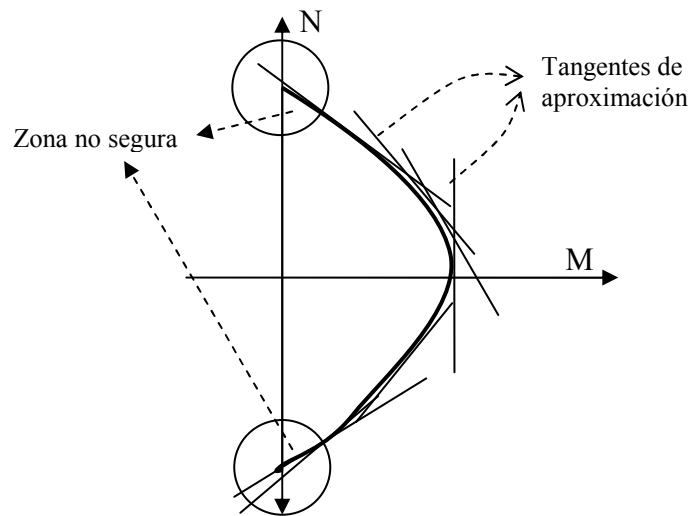


Figura 6. Diagrama de interacción. Aproximación por tangentes para elementos de hormigón armado

Planteando las ecuaciones de equilibrio para los elementos del pórtico simple, de acuerdo al esquema de la Figura 7, queda:

$$\begin{aligned} M_{12} + M_{21} &= 0 \\ M_{23} + M_{33} &= 0 \quad (\text{equilibrio de nudos}) \\ M_{35} + M_{45} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= 0 \\ M_{44} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

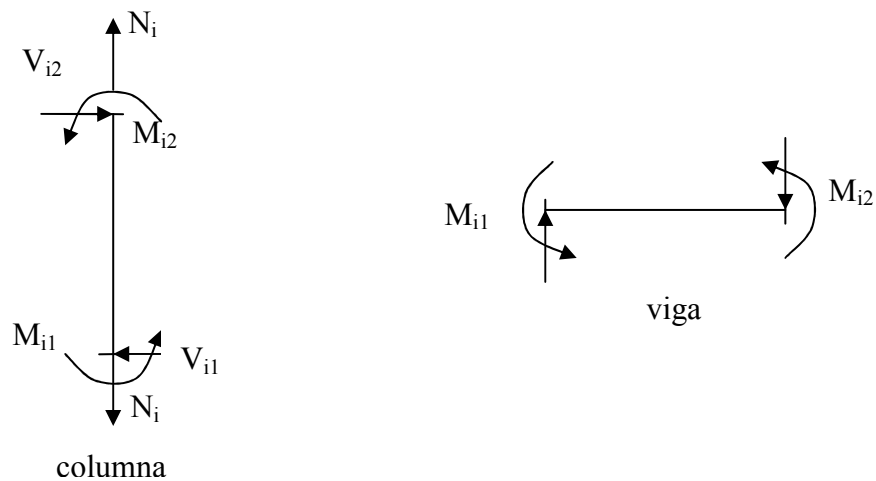


Figura 7. Esquemas de equilibrio

$$\frac{M_{11}+M_{12}}{h} + \frac{M_{14}+M_{45}}{h} = Q \cdot f \quad (20)$$

$$\frac{M_{22}+M_{23}}{a} + N_1 = P_1 \quad (21)$$

$$N_2 - \frac{M_{33}+M_{35}}{a} = P_1 \quad (22)$$

$$-\frac{M_{22}+M_{23}}{a} + \frac{M_{33}+M_{35}}{a} = P \cdot f \quad (23)$$

Si la carga P_1 proviene del peso propio no es afectada por el multiplicador de colapso.

La **función objetivo** se obtiene como suma de las condiciones de equilibrio, de (18) a (23):

$$N_1 + N_2 + M_{22} + M_{23} + M_{33} + M_{35} = 2 P_1 + f (P + Q b) \quad (24)$$

El sistema de restricciones es:

$$\begin{cases} -Mp_{ij} \leq M_{ij} \leq Mp_{ij} & , i=1 \dots ne \ , \ j=1 \dots nn & (25a) \\ -1 \leq \nu N_i \pm \mu M_{ij} \leq 1 & & (25b) \end{cases} \quad (25)$$

ne = número de elementos,
 nn = número de nudos

(25a) corresponde a las limitaciones impuestas al momento flector y (25b) corresponde a las limitaciones impuestas por la presencia de esfuerzo normal.

Note que las restricciones no cumplen con las condiciones que establece la forma estándar del Método Simplex, por lo que es necesario plantear un cambio de variables.

Para la resolución el programa entregará los valores de M y N , los cuales en general no corresponden a la situación de colapso inminente salvo que el número de rótulas sea el que haga a la estructura labil, en cuyo caso la configuración de esfuerzos es única.

El cambio de variables propuesto es:

$$y_k = M_{ij} + Mp_k^- \quad (26)$$

donde y_k debe ser positivo y en valor absoluto menor que Mp_k^- (valor negativo de momento de plastificación)

El conjunto de estas restricciones queda expresado como

$$\begin{aligned} y_k &\leq 2 Mp_k^- \\ \gamma N_n + \mu M_{ij} + 1 &\leq 2 \end{aligned} \quad (27)$$

$n = 1 \dots co$, co = número de columnas del pórtico.

El sistema de restricciones se puede expresar por:

$$[A][y] \leq [b] \quad (28)$$

$[A]_{(ntf+4*co) \times (ntf+4*co)}$ = matriz de coeficientes del sistema, que resulta ser la matriz identidad, lo que constituye una de las ventajas de realizar el cambio de variables.

siendo: $ntf = v_i \cdot (sc + 1) \cdot 2 + co \cdot 2$ = número total de momentos flectores

v_i = número de vigas de la estructura

sc = número de secciones críticas a considerar por vano de la estructura.

co = número de columnas de la estructura.

$$[b] = 2 * \begin{bmatrix} Mp_{ij} \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{(ntf+4*co) \times 1} \quad (29)$$

con tantos Mp_{ij} como momentos flectores hay, o sea ntf filas.

En la **función objetivo** se debe realizar el mismo desplazamiento de variables. Para el ejemplo que estamos desarrollando, la función es:

$$[c][y] + [c_1][Mp] = 2Q_1 + f(Q + Pb) - \frac{2}{\gamma} \quad (30)$$

siendo:

$[c]$ = vector de coeficientes de la función

$[y]$ = vector de variables

$[c_1]$ = vector de coeficientes de las solicitaciones de plastificación

$[Mp]$ = vector de solicitaciones de plastificación

$[b]$ = vector de términos independientes

$[A]$ = matriz de coeficientes del sistema de restricciones

A través del Método Simplex se maximiza $z = [c][y]$, por lo que se puede expresar como resultado del mismo que:

$$z_{\max} = 2Q_1 + f(Q + Pb) - [c_1][Mp] - \frac{2}{\gamma} \quad (31)$$

despejando el multiplicador de colapso:

$$\frac{z_{\max} + [c_1][Mp] - 2Q_1 - \frac{2}{\gamma}}{Q + Pb} = f \quad (32)$$

EJEMPLO NUMÉRICO

Presentamos un edificio que consta de dos plantas con una altura máxima de 9 metros y una superficie cubierta de 400 metros cuadrados, siendo la tipología estructural elegida “Pórticos Sismorresistentes de Hormigón armado” según el Proyecto de Reglamento INPRES-CIRSOC 103, Parte I y II, edición 2000, (PR I y PR II), con vanos rellenos de mampostería de ladrillos cerámicos macizos. Este edificio se ubica en la zona sísmica 4 del territorio de la República Argentina.

Terreno de Fundación: suelo tipo II (Tabla 3, PI)

Destino y Funciones: Edificio privado de habitación: Grupo B, (Cap. 5, PI)

Factor de riesgo: $\gamma_d = 1$ (Cap. 5. Tabla II, PI)

Características del edificio

Número de Pisos: **$n_p = 2$ (dos)** , Número de vanos: **$n_v = 2$ (dos)**

Tipología Estructural: **Pórticos Sismorresistentes de Hormigón Armado** (Cap.2, PR II). Entrepisos y Techo: Sistemas de losas macizas armadas en dos direcciones

Propiedades de los materiales

Hormigón: resistencia específica a la compresión **$f'_c = 25$ MPa** (1.2.1, PR II)

Acero: tensión de fluencia de la armadura longitudinal **$f_y = 420$ MPa;** (1.2.2. PR II)

tensión de fluencia de la armadura transversal **$f_{yt} = 420$ MPa.**

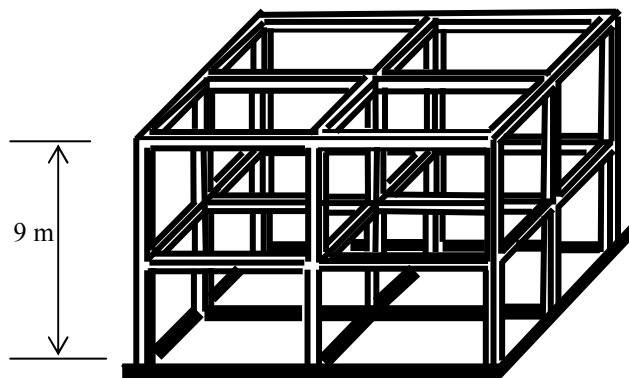


Figura 8: Esquema estructural del edificio

Resulta necesario aclarar que el ejemplo numérico se ha desarrollado solo para uno de los pórticos del edificio, indicado en la Figura 8. La verificación del mecanismo de colapso del pórtico de dos niveles presentado en la figura 9 se realiza con un programa desarrollado en plataforma MATLAB para tal fin, empleando el método descrito en los apartados anteriores.

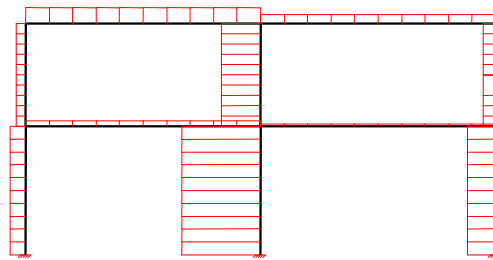
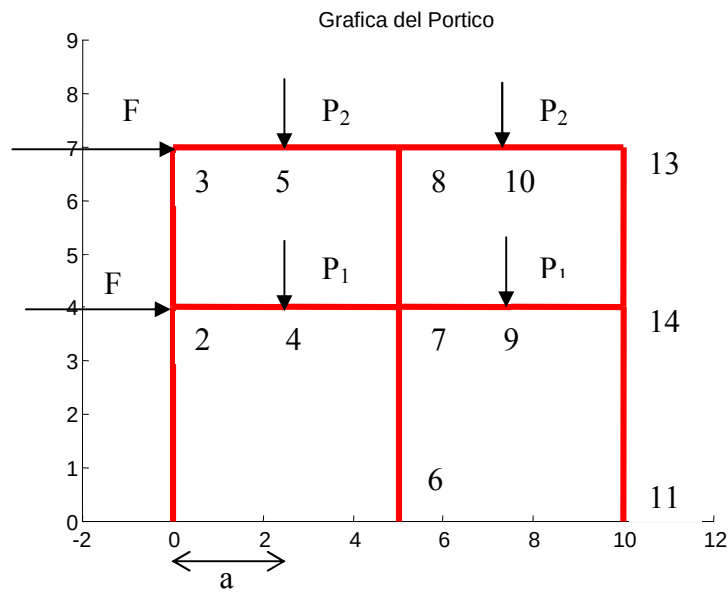


Diagrama de Esfuerzos Normales

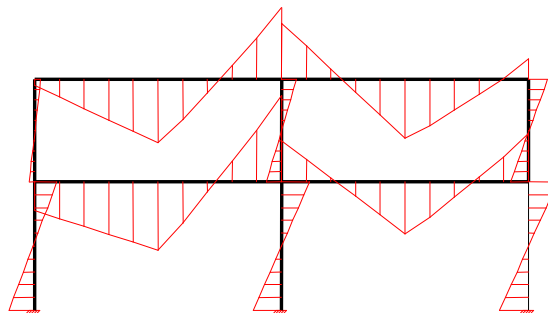


Diagrama de Momentos Flectores

Figura 9. Pórtico de dos niveles y dos vanos

Luego de obtenidos las solicitaciones en cada elemento y reacciones de apoyo se diseñan las secciones, dando los valores de armaduras. Contemplando este diseño se obtienen los valores de solicitaciones de plastificación de la estructura, Tablas 1 y 2.

Elemento-Nudo	Mp	Elemento-Nudo	Mp
1-1	153,03015	8-7	60,275775
1-2	153,03015	8-8	60,275775
2-2	146,34795	9-7	450,4185
2-3	146,34795	9-9	450,4185
3-2	450,4185	10-8	469,020038
3-4	450,4185	10-10	469,020038
4-3	469,020038	11-9	450,4185
4-5	469,020038	11-12	450,4185
5-4	450,4185	12-10	469,020038
5-7	450,4185	12-13	469,02004
6-5	469,020038	13-11	150,8157
6-8	469,020038	13-12	150,8157
7-6	126,709275	14-12	144,308325
7-7	126,709275	14-13	144,308325

Tabla 1. Momentos de plastificación

esfuerzos normales de los elementos

Elemento	N	b	d	Nu
1	-98,89909038	0,6	0,6	243,807179
2	-45,04804712	0,6	0,6	243,807179
3	24,09510543	0,6	1,2	506,598358
4	-40,55338932	0,6	1,2	506,640358
5	24,09510543	0,6	1,2	506,598358
6	-40,55338932	0,6	1,2	506,640358
7	-234,6254435	0,6	0,6	243,807179
8	-118,6539576	0,6	0,6	243,807179
9	19,18918338	0,6	1,2	506,598358
10	-26,14079521	0,6	1,2	506,640358
11	19,18918338	0,6	1,2	506,598358
12	-26,14079521	0,6	1,2	506,640358
13	-98,71960254	0,6	0,6	243,807179
14	-44,98895403	0,6	0,6	243,807179

Tabla 2. Esfuerzos normales de plastificación

A continuación se procede a verificar el mecanismo de colapso adoptado, mediante los programas elaborados para tal fin.

Los resultados obtenidos al aplicar el programa son

Valor del multiplicador de colapso $f_{colap} = 38.1081$

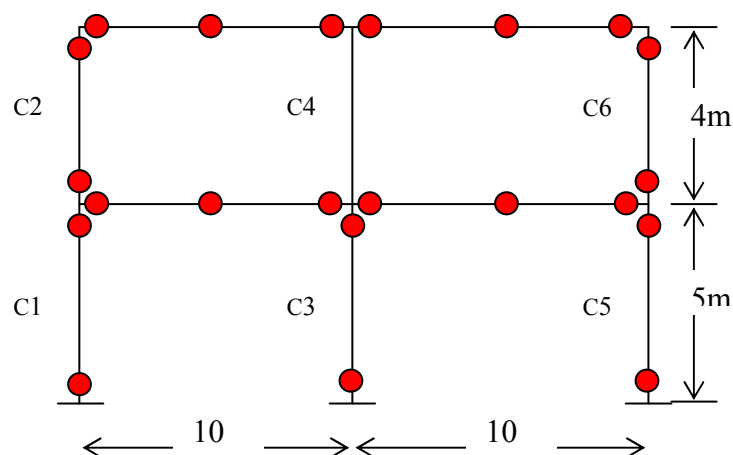


Figura 10. Formación de rótulas plásticas

Observando este resultado se concluye que el mecanismo de colapso previsto no es el que se está produciendo. Se produce rotulación en el pie y la cabeza de las columnas a excepción de la columna 4 que permanece sin rótulas, Figura 10. El mecanismo de colapso no se corresponde con ninguno de los considerados como aceptables por norma.

Hay que rediseñar la estructura, reforzando en especial las zonas donde no se desea que se formen rótulas plásticas y posibilitando un mecanismo de colapso cinemáticamente admisible para el pórtico dado. Concluyendo con una nueva verificación del mecanismo de colapso propuesto

Este trabajo se ejecuta tantas veces como sea necesario hasta lograr el mecanismo de colapso adecuado que cumple con los condicionamientos de la norma. El mecanismo “deseado”, que tiene innumerables ventajas en pórticos de varios niveles, es del tipo “columna fuerte- viga débil”, cuando se provee suficiente resistencia a las columnas, se puede evitar la formación de rótulas plásticas.

CONCLUSIONES

Es un hecho, ya suficientemente probado, que la programación lineal provee un formalismo matemático ideal para los problemas de análisis de mecanismos de colapso de pórticos.

Se muestra que la obtención del multiplicador de colapso de la estructura para el estado de cargas dado, puede ser totalmente automatizado para pórticos planos, usando conceptos del Método Simplex .

El método permite un enfoque racional, relativamente simple y directo para la identificación y verificación del mecanismo de colapso de una estructura ante acciones dadas.

Debe destacarse también que es necesario invertir un esfuerzo considerable en investigar y explotar las diversas alternativas para el desarrollo de metodologías de análisis y obtención del mecanismo de colapso real de una estructura sometido a sollicitaciones de esfuerzo normal y momento flector.

La conclusión más importante hasta el momento es que los resultados obtenidos, aunque escasos, por su potencial y versatilidad de aplicación permiten empezar a vislumbrar una aplicación directa de esta metodología en la práctica profesional, contribuyendo a optimizar los diseños. El método podría ser fácilmente incorporado a los reglamentos para el cálculo de pórticos.

RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo de investigación forma parte de el proyecto “Determinación del Mecanismo de Colapso de una estructura ante acciones laterales por programación lineal” subvencionado por la Secretaría de Ciencia y Técnica , CICITCA, de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina.

REFERENCIAS

- 1 Normas Argentinas para Construcciones Sismorresistentes INPRES - CIRSOC 103 - Parte I - Parte II . (1983), INPRES.
- 2 ACI – American Concrete Code – N°318. capítulo 21. (1995).
- 3 New Zeland Standard Code of Practice for the Desing of Concrete Structure. NZS 3101 – Part I. (1982), Standards Association of New Zeland .
- 4 Paulay, T., Priestley, M.J.N., Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings (1992) John Wiley & Souns, Inc.
- 5 Mokhtar-Zedeh, A., Kaveh, A. (1999) “Optimical plastic analysis and design of frames: graph theoretical methods”. Computers & Structures vol. 73 pp. 485-496.
- 6 Ganzarli, S. , Pantelides, C. P., Reaveley, L. D., Performance-based design using structural optimization. Earthquake Engineering and Structural Dynamics vol 24 (2000) pag. 1677-1690
- 7 Wong, M.B. (1996) “Effects of linearly varying distributed load on the collapse behaviour of frames”. Computer & Structures, Vol. 6.1. (5), pp. 909-914
- 8 Jennings, A (1996) “On the identifications of yield-line collapse mechanisms”. Engrg. Structures, Vol. 18 (4), pp. 332-337
- 9 Lubliner, J. (1990). “Plasticity Theory”. Mc Millan New York
- 10 Chen, W. F., Hahn, D.J., Plasticity for Structural Engineers. Spriger Verlag. New York 1988
- 11 Cuadros, P., Seguin, C. E. (2003) “Aplicación de la programación lineal a la ingeniería estructural”. Mecánica Computacional, Vol XXII, pp. 771-785
- 12 Budnick, F. (1997) “Matemática Aplicada para Administración, Economía y Ciencias Sociales”. 3ª edición Ed. Mc. Graw Hill.
- 13 Arreola Risa, J.S., Arreola Risa, A.,(2003) “Programación Lineal, Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa”. Thomson Learning, Inc.
- 14 Riddell, R , De la Llera J. C. (1996), “Seismic Analysis and Design: Current Practice and Future Trends”. Proc. 11 World Conference on Earthquake Engineering.
- 15 Spiliopoulos, K. V. And Souliotis, P. G. (1997) “Automatic collapse load analysis of regular plane frames using the force method”. Computers & Structures vol. 64 pp. 531 - 540.
- 16 MATLAB Reference Guide, The Mathworks, Inc. Natick, Massachussetts
- 17 Eaton, J.W., GNU – OCTAVE- Versión 2.1.46 (alpha ev67 – Dec- osf 5.1) (1996 – 2003), free software – [http:// www.octave.org](http://www.octave.org)