

PRESIONES DEBIDAS A SISMOS EN PRESAS CON PARAMENTO NO VERTICAL Y VASO FINITO

ARTURO DUBRAVCIC ALAIZA

**Ing. Civil, Msc. en Ingeniería del Agua y PhD. en Medio Ambiente
Tarija – Bolivia**

Docente Titular de la Universidad Autónoma Juan Misael Saracho Tarija- Bolivia

Docente invitado de la Universidad de Sevilla – España

Consultor permanente del área de Estructuras

Director Nacional de la Sociedad de Ingenieros de Bolivia

RESUMEN

Se presenta el método de mínimos cuadrados para valuar presiones hidrodinámicas en presas con paramento no vertical aguas arriba y vaso finito. La solución se obtiene mediante una serie con coeficientes indeterminados, que satisface las condiciones de frontera excepto en la cortina y la pared. Los coeficientes se determinan al satisfacer las condiciones de borde faltantes en el sentido de mínimos cuadrados. La solución se comprueba para el caso de paramentos verticales. Se presentan resultados para paramentos inclinados que se comparan con los obtenidos para el caso de vaso infinito. Para geometrías con doble inclinación se presentan resultados que no existen en la literatura.

SUMMARY

The method of square minima is presented to value pressures hydrodynamic in preys with non vertical adornment you dilute up and finite glass. The solution is obtained by means of a series with coefficients indeterminist two that satisfies the frontier conditions except in the curtain and the wall. The coefficients are determined when satisfying the conditions of border missed in the sense of square minima. The solution is proven for the case of vertical adornments. They are presented it is two for inclined adornments that they are compared with those obtained for the case of infinite glass. For geometries with double inclination you present so results that they don't exist in the literature.

INTRODUCCIÓN

El cálculo de las presiones hidrodinámicas generadas por sismos, que obran contra cortinas de presas, implica complicaciones tales de análisis que las soluciones disponibles se apoyan invariablemente en hipótesis simplificadoras. Admitiendo ciertas hipótesis que se antojan razonablemente aproximadas, unos análisis concluyen que las magnitudes de estas presiones alcanzan valores tan elevados que evidentemente resultan inadmisibles, mientras que, con base en otras hipótesis, aparentemente no menos razonables, se concluye que las presiones son tan pequeñas que los resultados son sospechosos. Así, para un caso particular en que se trata de un temblor real relativamente intenso, un criterio predice empujes hidrodinámicos superiores al triple de los hidrostáticos, mientras que otro criterio arroja valores inferiores al 30% de los empujes hidrostáticos ¹.

Ante tales circunstancias solo puede concluirse que el fenómeno es probablemente importante para el diseño de la mayoría de las presas y que sin duda exige mayor estudio.

Originalmente Lamb² en su Hidrodinámica estudio las características del movimiento natural de un fluido en un recipiente rígido y fijo, analizando ciertos tipos de movimientos forzados. Fue Westergaard³ el primer autor que estableció resultados aplicables al diseño de presas. Para ello considero el efecto bidimensional de un movimiento armónico estacionario en una cortina rígida, normal a un vaso de longitud y ancho infinitos. Tomando en cuenta la compresibilidad del agua y suponiendo el nivel libre inalterado, encontró que la distribución de presiones se asemeja a una parábola; propuso formulas aproximadas, válidas para relaciones altura del nivel libre de reposo H entre período T del movimiento menores que el primer valor crítico correspondiente ($H/T=359.6\text{m/seg}$)^º. Hoskins y Jacobsen⁴ verificaron experimentalmente en tanque rectangular los resultados de Westergaard, haciendo notar la poca influencia que tiene la relación de la longitud L del vaso a la altura H del agua, L/H , para valores superiores a 2.5 cuando las paredes se mueven en fase. Observaron que la flexibilidad de las paredes parece ser un factor que disminuye bastante las presiones ejercidas. Hinds, Creager y Justin⁵ aprovecharon los resultados obtenidos anteriormente. Propusieron un criterio para el caso de pared inclinada, la cual, hacen ver, debe estar sujeta a presiones menores que una pared vertical.

Werner y Sundquist⁶ consideraron los efectos de una perturbación armónica horizontal para diversos tipos de recipientes y formas de aplicación del movimiento. Incluyeron en su estudio los siguientes casos: vaso rectangular con movimiento de una o dos paredes; vaso cilíndrico con movimiento paralelo y transversal a las generatrices; vaso triangular, cilindro y pila circulares, y semiesfera. Se nota en ese trabajo que si ocurre una falla del vaso, que origine el movimiento de una sola pared, aumentan bastante las presiones, al menos para el caso $L/H < 2$. Se concluye también que la inclinación de las laderas disminuye las presiones sobre la cortina.

^º La primera frecuencia crítica, o frecuencia fundamental de vibraciones del líquido almacenado, en vaso rectangular, corresponde a este valor del cociente H/T , a su vez a la cuarta parte de la velocidad del sonido en el agua.

Chow⁷, a partir de los resultados de Westergaard, propone un método para calcular la presión hidrodinámica en cortinas con paramento inclinado.

Zangar y Haefeli⁸, por medio de analogías eléctricas y redes de flujo, estudiaron el movimiento de una cortina rígida con paramento inclinado en un vaso de longitud infinita, suponiendo que el líquido es incompresible. Obtuvieron las distribuciones de presiones que corresponden al paramento con diversas inclinaciones. En todos los casos resultan presiones menores que con paramento vertical.

Zangar⁹ también utilizando una analogía eléctrica y redes de flujo, amplió el trabajo anterior para diversas inclinaciones y dos planos del paramento de la cortina. Comparó el efecto de la compresibilidad y propuso una fórmula aproximada para el cálculo.

Estos autores concluyeron que, si más de la mitad superior de la cortina es vertical, se puede considerar la pantalla como pared vertical sin introducir errores excesivos.

Housner¹⁰ idealizó el líquido como incompresible y planteó y resolvió el problema en forma aproximada y sencilla con resultados aceptables.

Ambroseys¹¹, en un vaso de longitud finita con líquido incompresible estudio, mediante analogías eléctricas, el efecto de una falla del vaso, para pantallas inclinadas. Comparó sus resultados con los de Zangar⁽⁹⁾. Concluyó que el efecto de una falla del vaso disminuye muy rápidamente al aumentar el cociente L/H , pero dicho efecto es muy notorio aún para relaciones L/H del orden de la unidad. Le atribuye poca importancia al oleaje por sismo.

Napedvaridze¹² estudió analíticamente el caso de líquido incompresible en un vaso de longitud infinita con una cortina de paramento inclinado. Estimó los efectos de movimientos horizontales y verticales y de su combinación. Halló como resultado de estos análisis que el movimiento vertical tiene menor influencia que el horizontal.

Kotsubo¹³, en forma analítica, consideró la compresibilidad del agua en lo concerniente a empujes sobre presas rectangulares y presas de arco. Finalmente propuso una fórmula aproximada de carácter práctico.

Ferrandon¹⁴ consideró la compresibilidad del agua en un vaso de longitud infinita, con presa rígida de paramento vertical, respondiendo ante perturbaciones cualesquiera. Considero también el caso de vaso finito.

Kotsubo¹⁵ hizo un estudio amplio, de naturaleza teórica y experimental en presas de arco tomando en cuenta la compresibilidad del agua, movimientos longitudinales y transversales al vaso, laderas radiales inclinadas y verticales y laderas no verticales. Los resultados de los experimentos están de acuerdo con la teoría. Encontró que las presiones aumentan en los apoyos de la presa y son menores que el caso bidimensional, aclarando así numerosos factores que no se habían estudiado previamente con claridad.

Chen 'Chzhen'-Chen¹⁶ dedicó su atención al movimiento en estado estacionario, de una cortina rígida vertical, con vaso de longitud infinita y fluido incompresible.

Consideró la influencia de la altura, y analizó de manera especial las olas superficiales.

Chen 'Chzhen'-Chen¹⁷ amplió el estudio anterior para sismo inclinado; concluyó que el efecto del movimiento vertical no es importante salvo para sismos de intensidad excepcional.

Bustamante y Flores Victoria¹⁸ proponen un método simplista, muy adecuado para fines prácticos, para estimar la distribución de la presión hidrodinámica a lo alto de la presa durante un sismo mediante el concepto de espectro hidrodinámico. Las hipótesis del método son que el agua es compresible con movimiento irrotacional de pequeña amplitud, que no hay disipación de energía, que no hay cambio en el nivel de la superficie libre del agua que el paramento mojado de la presa es vertical, que la excitación dinámica es un movimiento de la cortina como cuerpo rígido normal al paramento mojado, que al iniciarse el movimiento el agua esta en reposo, que la longitud del deposito en la dirección normal a la cortina es infinita y que el máximo desplazamiento de la cortina es pequeño en comparación con su altura.

Avilés¹⁹ realizó un trabajo para determinar los coeficientes de presión debidos a sismos en presas con paramento no vertical y vaso infinito.

En este trabajo se desarrollo un método para determinar las presiones debidas a sismos en presas con paramento no vertical y vaso finito, se utilizo el método de mínimos cuadrados para valuar dichas presiones. Se mantiene la hipótesis de líquido incompresible invíscido e irrotacional; vaso de sección rectangular y longitud finita; desplazamientos pequeños comparados con las dimensiones de la presa; no se generan ondas de gravedad en la superficie libre del líquido; cortina rígida con paramento no vertical; excitación horizontal en la interfase agua-cortina; fondo rígido. Pues lo que se desea investigar es la forma de la cortina y la influencia de la pared que se encuentra frente a la cortina. La solución se genera mediante una familia de funciones, que son soluciones de la ecuación que gobierna el problema y satisfacen las condiciones de frontera excepto en el paramento de la cortina y de la pared. Se tiene así una serie cuyos coeficientes se determinan de manera que se satisfagan las condiciones de bordes faltantes en el sentido de mínimos cuadrados. Se presentan resultados para paramentos inclinados tanto de la cortina como de la pared.

Los resultados se comprueban con algunos existentes en la literatura^{19, 20}.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Hipótesis

Las hipótesis simplificadoras del problema son:

- a) Líquido incompresible, invíscido e irrotacional.
- b) Vaso de sección rectangular y longitud finita.
- c) Desplazamientos pequeños comparados con las dimensiones de la presa.
- d) No se generan ondas de gravedad en la superficie libre del líquido.
- e) La cortina y el fondo del vaso son rígidos.
- f) La excitación actúa horizontalmente en la interfase agua-cortina.

Las hipótesis anteriores son razonables para la solución del problema, ya que trabajos de investigación realizados anteriormente con la mayoría de dichas hipótesis, demuestran una buena precisión; en este trabajo lo que se trata de contemplar es la longitud del vaso como finita; así la energía que difracta la pared regresa a la cortina y tiene un efecto muy importante en el cálculo de las presiones. El problema se formula en forma bidimensional y se llegan a resultados satisfactorios.

2.2 Ecuación del movimiento y su desarrollo

Como se conoce por hidrodinámica, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento irrotacional de un fluido incompresible

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

Donde

∇^2 = operador laplaciano

ϕ = potencial de velocidades; $\phi = \phi(x, y, t)$, tal que:

$$\dot{U} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \dot{V} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ y } P = \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.2)$$

En donde: U, V, son componentes de velocidades

x, y, direcciones de referencia

P, presión hidrodinámica

δ , densidad del fluido

t, tiempo

Empleando el principio de superposición el potencial ϕ se puede expresar

Como:

$$\phi = \phi_c + \phi_p \quad (2.3)$$

Donde: ϕ_c = potencial de velocidad debido solamente al movimiento de la cortina
 ϕ_p = potencial de velocidad debido solamente al movimiento de la pared
 Si la cortina se ve sometida a un movimiento horizontal arbitrario $X_c(t)$ y la pared a otro movimiento horizontal arbitrario $X_p(t)$, como se muestra en la figura "a", las condiciones de frontera que se deben satisfacer son:

$$\left. \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.4)$$

Esto implica que la velocidad en el fondo del vaso es igual a cero.

$$\left. \frac{\partial \phi_c}{\partial t} \right|_{y=H} = 0 \quad \left. \frac{\partial \phi_p}{\partial t} \right|_{y=H} = 0 \quad (2.5)$$

Nos indica que la presión en la superficie es igual a la atmosférica ($P = 0$).

$$\left. \frac{\partial \phi_c}{\partial N} \right|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \cos \theta_c \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_p}{\partial N} \right|_{s_p} = 0$$

$$\left. \frac{d\phi_c}{dN} \right|_{s_p} = 0$$

$$\left. \frac{d\phi_p}{dN} \right|_{s_p} = -\dot{x}_p(t) \cos \theta_p \quad (2.7)$$

Las condiciones 2.6 y 2.7 nos indican la compatibilidad de velocidad normal a la cortina y pared respectivamente.

Resolviendo la ecuación 2.1 por el método de separación de variables se tiene:

$$\phi = \phi_x(x) \phi_y(y) \phi_t(t)$$

Aplicando el operador laplaciano a esta expresión se tiene:

$$\frac{d^2 \phi_x(x)}{dx^2} \phi_y(y) \phi_t(t) + \frac{d^2 \phi_y(y)}{dy^2} \phi_x(x) \phi_t(t) = 0$$

$$\frac{d^2 \phi_x(x)}{dx^2} \frac{1}{\phi_x(x)} + \frac{d^2 \phi_y(y)}{dy^2} \frac{1}{\phi_y(y)} = 0$$

La solución de esta ecuación corresponde a una constante que la llamaremos λ^2 con diferente signo para cada término, con esa solución aseguramos la igualdad de la ecuación:

$$\frac{d^2 \phi_x(x)}{dx^2} \frac{1}{\phi_x(x)} = \lambda^2 \quad \frac{d^2 \phi_y(y)}{dy^2} \frac{1}{\phi_y(y)} = -\lambda^2$$

$$\frac{d^2 \phi_x(x)}{dx^2} - \lambda^2 \phi_x(x) = 0 \quad \frac{d^2 \phi_y(y)}{dy^2} + \lambda^2 \phi_y(y) = 0$$

Estas dos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes tienen como soluciones:

$$\phi_x(x) = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$$

$$\phi_y(y) = C \cos \lambda y + D \sin \lambda y$$

Realizando la combinación lineal de las soluciones tenemos:

$$\phi = \phi_t(t) (A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}) (C \cos \lambda y + D \sin \lambda y) \quad (2.8)$$

donde: A, B, C y D son constantes a determinar aplicando las condiciones de frontera

La condición de frontera 2.4 implica que:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{Aplicando esta condición a la ecuación 2.8 se tiene}$$

$$\phi_t(-AC e^{\lambda x} \sin \lambda y(y) + AD e^{\lambda x} \cos \lambda y(y) - BC e^{-\lambda x} \sin \lambda y(y) + BD e^{-\lambda x} \cos \lambda y(y)) = 0$$

Para $y = 0 \Rightarrow D = 0$

La condición de frontera 2.5 implica que:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=H} = 0$$

Aplicando esta condición a la ecuación 2.8 y tomando $D = 0$

Para que esta expresión $\cos \lambda H = 0$ se cumpla se tiene:

$$\lambda H = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{donde: } n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$\lambda_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2H} \quad \text{Para: } n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Por lo anterior, el potencial de velocidad ϕ se puede construir como:

$$\phi = \phi_t(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (2.9)$$

$$\lambda_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2H} \quad \text{Para: } n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (2.10)$$

donde A_n y B_n son coeficientes indeterminados que se determinarán a partir de las condiciones de frontera faltantes.

Como los movimientos de la cortina y de la pared están desfasados, se propone generar el potencial de velocidades ϕ mediante la superposición de los potenciales ϕ_c y ϕ_p .

Según la ecuación 2.9 los potenciales ϕ_c y ϕ_p estarán dados por:

$$\phi = \phi_c^e(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e e^{\lambda_n x} + B_n^e e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (2.11)$$

$$\phi_p = \phi_p^p(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p e^{\lambda_n x} + B_n^p e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (2.12)$$

Las condiciones de frontera 2.6 y 2.7 implican que:

$$\left. \frac{d\phi_c}{dN} \right|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \cos \theta_c \quad \therefore \quad \phi_c^e(t) = \dot{x}_c(t)$$

$$\left. \frac{d\phi_p}{dN} \right|_{s_p} = -\dot{x}_p(t) \cos \theta_p \quad \therefore \quad \phi_p^p(t) = \dot{x}_p(t)$$

Por tanto los potenciales de la cortina y la pared quedan:

$$\phi_c = \dot{x}_c(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e e^{\lambda_n x} + B_n^e e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (2.13)$$

$$\phi_p = \dot{x}_p(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p e^{\lambda_n x} + B_n^p e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (2.14)$$

La solución del problema consiste en determinar los coeficientes A_n^e y B_n^e , A_n^p y B_n^p , en el sentido de mínimos cuadrados.

Conocidos estos coeficientes las presiones hidrodinámicas se pueden evaluar con la ecuación 2.2.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Como se dijo en el capítulo II, la solución del problema consiste en determinar los coeficientes A_n^c y B_n^c , A_n^p y B_n^p ; estos coeficientes se determinarán en el sentido de mínimos cuadrados; realizando el cálculo de cada potencial.

3.1 Cálculo del potencial de velocidad de la cortina

$$\phi_c = \dot{x}_c(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c e^{\lambda_n x} + B_n^c e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (3.1)$$

Aplicando la condición de frontera 2.6 se tiene:

$$\left. \frac{d\phi_c}{dN} \right|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \cos \theta_c$$

Como:

$$x = x(N, \theta) \quad y = y(N, \theta);$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\left[\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \frac{dx}{dN} + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \frac{dy}{dN} \right] \Big|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \cos \theta_c$$

Pero sabemos que:

$$\frac{dx}{dN} = \cos \theta_c \quad y \quad \frac{dy}{dN} = \sin \theta_c$$

$$\left[\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \cos \theta_c + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \sin \theta_c \right] \Big|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \cos \theta_c$$

$$\left. \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right|_{s_c} + \tan \theta_c \left. \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \quad (3.2)$$

Sustituyendo la ecuación 3.1 en la 3.2 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c \lambda_n e^{\lambda_n x} - B_n^c \lambda_n e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \right] \Big|_{s_c} \\ - \tan \theta_c \dot{x}_c(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c \lambda_n e^{\lambda_n x} - B_n^c \lambda_n e^{-\lambda_n x}) \lambda_n \sin \lambda_n y \right] \Big|_{s_c} = -\dot{x}_c(t) \\ \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n A_n^c e^{\lambda_n x} \cos \lambda_n y - \lambda_n B_n^c e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \right. \\ \left. - \tan \theta_c \lambda_n A_n^c e^{\lambda_n x} \sin \lambda_n y - \tan \theta_c \lambda_n B_n^c e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y) \right] \Big|_{s_c} = -1 \end{aligned}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^c \lambda_n y (\tan \theta_c e^{\lambda_n x} \sin \lambda_n y - e^{\lambda_n x} \cos \lambda_n y) + B_n^c \lambda_n (\tan \theta_c e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y + e^{-\lambda_n x} \cos \theta_c \lambda_n y)] \right] \Big|_{s_c} = 1$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^c \lambda_n e^{\lambda_n x} (\tan \theta_c \sin \lambda_n y - \cos \lambda_n y) + B_n^c \lambda_n e^{-\lambda_n x} (\tan \theta_c \sin \lambda_n y + \cos \theta_c \lambda_n y)] \right] \Big|_{s_c} = 1$$

Sea:

$$f_n(x, y) = \lambda_n e^{\lambda_n x} (\tan \theta_c \sin \lambda_n y - \cos \theta_c \lambda_n y) \quad (3.3)$$

$$g_n(x, y) = \lambda_n e^{-\lambda_n x} (\tan \theta_c \sin \lambda_n y + \cos \theta_c \lambda_n y) \quad (3.4)$$

Entonces se puede escribir:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^c f_n(x, y) + B_n^c g_n(x, y)] \right] \Big|_{s_c} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^c f_n(x, y) \Big|_{s_c} + B_n^c g_n(x, y) \Big|_{s_c}] = 1 \quad (3.5)$$

Aplicando la condición de frontera 2.7 a la ecuación 3.1, se tiene:

$$\frac{d\phi_c}{dN} \Big|_{s_p} = 0$$

$$\text{Como } x = x(N, \theta) \quad y \quad y = y(N, \theta)$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\left[\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \frac{dx}{dN} + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \frac{dy}{dN} \right] \Big|_{s_p} = 0$$

$$\text{Pero sabemos que: } \frac{dx}{dN} = -\cos \theta_p \quad y \quad \frac{dy}{dN} = \sin \theta_p$$

$$\left[-\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \cos \theta_p + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \sin \theta_p \right] \Big|_{s_p} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \Big|_{s_p} - \tan \theta_p \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \Big|_{s_p} = 0$$

Sustituyendo la ecuación 3.1 en la 3.6 se tiene:

$$\begin{aligned}
& x_c(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c \lambda_n e^{\lambda_n x} - B_n^c \lambda_n e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \right] \Big|_{S_c} \\
& + \tan \theta_p x_p(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c e^{\lambda_n x} + B_n^c e^{-\lambda_n x}) \lambda_n \sin \lambda_n y \right] \Big|_{S_p} = 0 \\
& \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n A_n^c e^{\lambda_n x} \cos \lambda_n y - \lambda_n B_n^c e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y + \tan \theta_p \lambda_n A_n^c e^{\lambda_n x} \sin \lambda_n y \right. \\
& \quad \left. + \tan \theta_p \lambda_n B_n^c e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y) \right] \Big|_{S_p} = 0 \\
& \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c \lambda_n (\tan \theta_p e^{\lambda_n x} \sin \lambda_n y + e^{\lambda_n x} \cos \lambda_n y) + B_n^c \lambda_n (\tan \theta_p e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y) \right] \Big|_{S_p} = 0
\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c \lambda_n e^{\lambda_n x} (\tan \theta_p \sin \lambda_n y + \cos \lambda_n y) + B_n^c \lambda_n e^{-\lambda_n x} (\tan \theta_p \sin \lambda_n y - \cos \lambda_n y)) \right] \Big|_{S_p} = 0$$

Sea:

$$Y_n(x, y) = \lambda_n e^{\lambda_n x} (\tan \theta_p \sin \lambda_n y + \cos \lambda_n y) \quad (3.7)$$

$$S_n(x, y) = \lambda_n e^{-\lambda_n x} (\tan \theta_p \sin \lambda_n y - \cos \lambda_n y) \quad (3.8)$$

Entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^c Y_n(x, y) + B_n^c S_n(x, y)] \right] \Big|_{S_p} = 0 \\
& \left[\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^c Y_n(x, y)] \right] \Big|_{S_p} + B_n^c S_n(x, y) \Big|_{S_p} = 0
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Las ecuaciones 3.5 y 3.9 se pueden resolver en el sentido de mínimos cuadrados. El error cuadrático en la cortina y en la pared está dado por:

$$E = \int_{S_c} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c f_n(x, y) + B_n^c g_n(x, y)) - 1 \right]^2 ds + \int_{S_p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c Y_n(x, y) + S_n^c g_n(x, y)) \right]^2 ds \quad (3.10)$$

Para que el error sea mínimo se necesita que:

$$\frac{\partial E}{\partial A_m^c} = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial B_m^c} = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.12)$$

Según la ecuación 3.11

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial A_m^e} &= \int_{S_c} 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e f_n(x,y) + B_n^e g_n(x,y)) - 1 \right] + f_m(x,y) ds + \int_{S_p} 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e Y_n(x,y) \right. \\
&\quad \left. + B_n^e S_n(x,y)) \right] Y_m(x,y) ds = 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} A_n^e \int_{S_c} f_n(x,y) f_m(x,y) ds + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \int_{S_c} f_m(x,y) Y_n(x,y) ds \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \int_{S_p} Y_m(x,y) S_n(x,y) ds = 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} A_n^e \left[\int_{S_c} f_m(x,y) f_n(x,y) ds + \int_{S_p} Y_m(x,y) Y_n(x,y) ds \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \left[\int_{S_c} f_m(x,y) g_n(x,y) ds + \int_{S_p} Y_m(x,y) S_n(x,y) ds \right] = \int_{S_c} f_m(x,y) ds \\
m &= 1, 2, 3, \dots, \infty
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Según la ecuación 3.12

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial B_m^e} &= \int_{S_c} 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e f_n(x,y) + B_n^e g_n(x,y)) - 1 \right] + g_m(x,y) ds + \int_{S_p} 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e Y_n(x,y) \right. \\
&\quad \left. + B_n^e S_n(x,y)) \right] S_m(x,y) ds = 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} A_n^e \int_{S_c} f_n(x,y) g_m(x,y) ds + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \int_{S_c} g_n(x,y) g_m(x,y) ds \\
&\quad - \int_{S_c} g_m(x,y) ds \sum_{n=1}^{\infty} A_n^e \int_{S_p} Y_n(x,y) S_m(x,y) ds \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \int_{S_p} S_n(x,y) S_m(x,y) ds = 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} A_n^e \left[\int_{S_c} g_m(x,y) f_n(x,y) ds + \int_{S_p} S_m(x,y) Y_n(x,y) ds \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \left[\int_{S_c} f_m(x,y) g_n(x,y) ds + \int_{S_p} S_m(x,y) S_n(x,y) ds \right] = \int_{S_c} g_m(x,y) ds \\
m &= 1, 2, 3, \dots, \infty
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Las ecuaciones obtenidas 3.13 y 3.14 corresponden a dos sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen a los coeficientes A_n^e y B_n^e , $n=1,2,3,\dots,\infty$.

3.2 Calculo del potencial de velocidad de la pared

$$\phi_p = x_p(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p e^{\lambda_n x} + B_n^p e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \tag{3.15}$$

Aplicando la condición de frontera 3.6 y realizando operaciones similares a las que se efectuaron para el cálculo del potencial de velocidad de la cortina se tiene:

$$\left. \frac{d\phi_p}{dN} \right|_{S_c} = 0 \quad \text{Condición 3.6}$$

$$\left. \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right|_{S_c} + \left. \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \operatorname{tg} \theta_c \right|_{S_c} = 0 \quad (3.16)$$

Sustituyendo la ecuación 3.15 en la 3.16 y realizando operaciones se tiene:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^p \lambda_n e^{\lambda_n x} (\operatorname{tg} \theta_c \operatorname{sen} \lambda_n y - \cos \lambda_n y) + B_n^p \lambda_n e^{-\lambda_n x} (\operatorname{tg} \theta_c \operatorname{sen} \lambda_n y + \cos \lambda_n y) \operatorname{sen} \lambda_n y + \cos \lambda_n y \right] \right] \Big|_{S_c} = 0$$

Según las expresiones 3.3 y 3.4 se puede escribir:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p f_n(x, y) + B_n^p g_n(x, y)) \right] \Big|_{S_c} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^p f_n(x, y) \Big|_{S_c} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^p g_n(x, y) \Big|_{S_c} = 0 \quad (3.17)$$

Aplicando la condición de frontera 2.17, a la ecuación 3.15 y realizando operaciones se tiene:

$$\left. \frac{d\phi_p}{dN} \right|_{S_p} = x_p(t) \cos \theta_p \quad \text{condición 3.7}$$

$$\left. \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right|_{S_p} - \operatorname{tg} \theta_p \left. \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right|_{S_p} = -x_p(t) \quad (3.18)$$

Sustituyendo la ecuación 4.15 en la 4.18 y realizando operaciones se obtiene:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^p \lambda_n e^{\lambda_n x} (\operatorname{tg} \theta_p \operatorname{sen} \lambda_n y + B_n^p \lambda_n e^{-\lambda_n x} (\operatorname{tg} \theta_p \operatorname{sen} \lambda_n y - \cos \lambda_n y)) \right] \right] \Big|_{S_c} = -1$$

Según las expresiones 3.7 y 3.8 se puede escribir:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p Y_n(x, y) + B_n^p S_n(x, y)) \right] \Big|_{S_c} = -1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^p Y_n(x, y) \Big|_{S_c} + B_n^p S_n(x, y) \Big|_{S_c} \right] = -1 \quad (3.19)$$

Las ecuaciones 3.17 y 3.19 se pueden resolver en el sentido de mínimos cuadrados. El error cuadrático en la cortina y en la pared esta dado por:

$$E = \int_{S_c} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p f_n(x, y) + B_n^p g_n(x, y)) \right]^2 ds + \int_{S_p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p Y_n(x, y) + B_n^p S_n(x, y)) + 1 \right]^2 ds \quad (3.20)$$

Para que el error sea mínimo se necesita que:

$$\frac{\partial E}{\partial A_m^p} = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial E}{\partial B_m^p} = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.22)$$

Sustituyendo la ecuación 3.20 en la 3.21 y realizando operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^p \left[\int_{S_c} f_m(x, y) f_n(x, y) ds + \int_{S_p} Y_m(x, y) Y_n(x, y) ds \right] + \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^p \left[\int_{S_c} f_m(x, y) g_n(x, y) ds + \int_{S_p} Y_m(x, y) S_n(x, y) ds \right] = \\ - \int_{S_p} Y_m(x, y) ds \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sustituyendo la ecuación 3.20 en la 3.22 y realizando operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^p \left[\int_{S_c} g_m(x, y) f_n(x, y) ds + \int_{S_p} S_m(x, y) Y_n(x, y) ds \right] + \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^p \left[\int_{S_c} g_m(x, y) g_n(x, y) ds + \int_{S_p} S_m(x, y) S_n(x, y) ds \right] = \\ - \int_{S_p} S_m(x, y) ds \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \quad (3.24)$$

Las ecuaciones obtenidas 3.23 y 3.24 corresponden a dos sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen a los coeficientes A_n^p y B_n^p , $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Los sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen tanto a los coeficientes A_n^c y B_n^c y A_n^p y B_n^p se pueden representar en el siguiente esquema matricial:

$$n = 1, n = 2, n = 3, \dots, n = MN$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ \vdots \\ m = MN \end{matrix} \left[\begin{bmatrix} \int_{S_c} f_m(x, y) f_n(x, y) ds + \int_{S_p} Y_m(x, y) Y_n(x, y) ds \\ \int_{S_c} g_m(x, y) f_n(x, y) ds + \int_{S_p} S_m(x, y) Y_n(x, y) ds \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} A^c \\ B^c \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \int_{S_c} f_m(x, y) ds \\ \int_{S_c} g_m(x, y) ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$n = 1, n = 2, n = 3, \dots, n = MN$$

$$\begin{matrix} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ \vdots \\ m = MN \end{matrix} \begin{bmatrix} \left[\int_{S_c} f_m(x, y) f_n(x, y) ds + \int_{S_p} Y_m(x, y) Y_n(x, y) ds \right] \\ \left[\int_{S_c} f_m(x, y) g_n(x, y) ds + \int_{S_p} Y_m(x, y) S_n(x, y) ds \right] \\ \left[\int_{S_c} g_m(x, y) f_n(x, y) ds + \int_{S_p} S_m(x, y) Y_n(x, y) ds \right] \\ \left[\int_{S_c} g_m(x, y) g_n(x, y) ds + \int_{S_p} S_m(x, y) S_n(x, y) ds \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A^p] \\ [B^p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[- \int_{S_p} Y_m(x, y) ds \right] \\ \left[- \int_{S_p} S_m(x, y) ds \right] \end{bmatrix}$$

Se puede observar que las matrices de los coeficientes son iguales y simétricas, por lo cual su solución numérica se facilita.

3.3 Cálculo del coeficiente de presión y de la presión

Según la ecuación de la hidrodinámica, el potencial de velocidad es:

$$\phi = \phi_c + \phi_p$$

y sustituyendo las expresiones 3.11 y 3.12 se tiene

$$\phi = \dot{x}_c(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^c e^{\lambda_n x} + B_n^c e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y + \dot{x}_p(t) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^p e^{\lambda_n x} + B_n^p e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \quad (3.25)$$

Sea el coeficiente de presión debido solamente al movimiento de la cortina igual a:

$$C_p^c = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{A_n^c}{H} \right) e^{\lambda_n x} + \left(\frac{B_n^c}{H} \right) e^{-\lambda_n x} \right] \cos \lambda_n y \quad (3.26)$$

Y el coeficiente de presión debido solamente al movimiento de la pared igual a:

$$C_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{A_n^p}{H} \right) e^{\lambda_n x} + \left(\frac{B_n^p}{H} \right) e^{-\lambda_n x} \right] \cos \lambda_n y \quad (3.27)$$

Entonces la expresión 3.25 se puede escribir:

$$\phi = \dot{x}_c(t) H C_p^c + \dot{x}_p(t) H C_p^p$$

La presión hidrodinámica esta dada por la ecuación

$$\begin{aligned} P &= \delta H \ddot{x}_c(t) C_p^c + \delta H \ddot{x}_p(t) C_p^p \\ P &= \delta H (\ddot{x}_c(t) C_p^c + \ddot{x}_p(t) C_p^p) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para movimiento armónico estacionario se tiene:

$$\ddot{x}_c(t) = A_c \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = A_p \cos(\omega t - \psi)$$

donde: A_c = amplitud de la aceleración en la cortina
 A_p = amplitud de la aceleración en la pared
 ψ = ángulo de fase

Entonces la ecuación 3.28 se puede expresar como:

$$P = \delta H (A_c \cos \omega t C_p^c + A_p \cos(\omega t - \psi) C_p^p)$$

$$P = \delta H A_c (C_p^c \cos \omega t + \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p - \cos(\omega t - \psi))$$

Pero $\delta = \frac{\gamma}{g}$ y γ = Peso Volumétrico del agua g = aceleración de la gravedad

$$P = \gamma H \left(\frac{A_c}{g}\right) (C_p^c \cos \omega t + \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p - \cos \omega t \cos \psi + \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \sin \omega t \sin \psi)$$

$$P = \gamma H \left(\frac{A_c}{g}\right) \left[C_p^c + \cos \psi \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \cos \omega t + \sin \psi \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \sin \omega t \right]$$

$$P = \left(\frac{A_c}{g}\right) \gamma H \sqrt{\left[\left(C_p^c + \cos \psi \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \right)^2 + \left(\sin \psi \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \right)^2 \right]} \cos(\omega t - \alpha)$$

Sea el coeficiente de presión total igual a:

$$C_p = \sqrt{\left(C_p^c + \cos \psi \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \right)^2 + \left(\sin \psi \left(\frac{A_p}{A_c}\right) C_p^p \right)^2} \quad (3.29)$$

Entonces la presión queda expresada de la siguiente forma:

$$P = \left(\frac{A_c}{g}\right) \gamma H C_p \cos(\omega t - \alpha) \quad (3.30)$$

Donde: $\left(\frac{A_c}{g}\right) \gamma H C_p$ es la amplitud del movimiento

Sea el coeficiente de presión total igual a:

$\frac{A_c}{g}$ Máxima aceleración del terreno que está dada por el máximo pico del acelerograma de diseño.

$\cos(\omega t - \alpha)$ Variación en el tiempo.

CONCLUSIONES

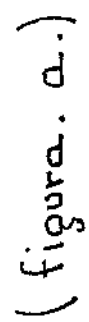
Se ha presentado un método para resolver el problema de presiones debidas a sismos en presas de gravedad, con paramento no vertical y vaso finito.

Las conclusiones que se obtuvieron son las siguientes:

- a) Se puede afirmar que el método desarrollado puede ser aplicado a presas de gravedad de diferentes geometrías y diferentes inclinaciones de la pared.
- b) Está comprobado que al exceder la longitud, L/H de 4, el efecto de la pared sobre la cortina es nulo.
- c) Cuando el ángulo de inclinación de la cortina y de la pared exceden de 30° el método pierde precisión; eso tal vez se deba al orden de desarrollo empleado.
- d) Cuando la inclinación de la cortina se mantiene constante y la inclinación de la pared crece, se nota una disminución del coeficiente de presión para los ángulos de fase de π medios y π , en cambio crece para el ángulo de fase cero.
- e) Cuando la inclinación de la pared se mantiene constante y la inclinación de la cortina crece, se nota también una disminución del coeficiente de presión para los ángulos de fase de π medios y π , en cambio crece para el ángulo de fase cero.
- f) De acuerdo a las conclusiones d y e se puede decir que el ángulo de fase resulta ser un parámetro significativo para el cálculo de presiones.
- g) También se aprecia que cuando CH disminuye el coeficiente de presión crece, esto es lógico porque así la geometría de la presa se acerca a la de paramento vertical, que es el caso más crítico.
- h) Se puede afirmar que cuando el paramento de la cortina y de la pared presentan inclinaciones, el coeficiente de presión disminuye considerablemente; lo cual implica que se pueden hacer diseños más óptimos tomando en cuenta la geometría real de la presa; lo cual se traduce en un ahorro para la obra.
- i) Finalmente se puede concluir que la solución presentada es simple y precisa, y se puede adoptar como método de análisis para fines de diseño.

REFERENCIAS

1. Rosenblueth, E., "Presión hidrodinámica por sismo en presas. Estado del arte", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. 283 (enero 1971).
2. Lamb, H., "Hydrodynamics", Dover Publications Ltd. (New York, 1945).
3. Westergaard, H.M., "Water pressure on dams during earthquakes", Trans. American Soc. Civ. Engrs., (1933).
4. Hoskins, L.-M. and Jacobsen, L.S., "Water pressure in a tank caused by a simulated earthquake", Bull. Seism. Soc. Amer. (1934).
5. Hinds, J., Creager, W.P., and Justin, J.D., "Engineering for Dams", Vol. II John Wiley and Sons (New York, 1945).
6. Werner, P.W. and Sundquist, K.J., "On hydrodynamic earthquake effects", Trans. Amer. Geophys. Union, (1949).
7. Chow, V.T., "Hydrodynamic pressure due to horizontal earthquake shock computed by curves", Civil Engineering (sep. 1951).
8. Zangar, C.N. and Haefeli, R.J., "Electric analog indicates effects of horizontal earthquake shock on dams", Civil Engineering, (abr. 1952).
9. Zangar, C.N., "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes", Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, (1953).
10. Housner, G.W., "Dynamic pressures on accelerated fluid containers", Bull. Seism. Soc. of Amer., (1957).
11. Ambraseys, N.N., "Seismic hydrodynamics and wave generation in reservoirs", Proc. Assoc. Internat. des Recherches Hydrauliques, Lisboa, 7, (1957).
12. Napedvaridze, Sh. G., "Seismostoičnost Gidrotexnicheskix Soorullenü", Controliisdat (Moscú, 1959).
13. Kotsubo, S., "Dynamic water pressure on dam due to irregular earth-quakes", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ., (1959).
14. Ferrandon, J., "Actions hydrodynamiques des seismes sur les ouvrages de retenue", Le génie Civil, (mar. 1960).
15. Kotsubo, S., "External forces on arch dams during earthquakes", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ., (1961).
16. Chen 'Chzhen'- Chen, "The effect of dynamic fluid pressure on a dam during earthquakes", Jour. Appl. Math. and Mech., (1961).
17. Chen 'Chzhen'-Chen, "On the hydrodynamic pressure on a dam caused by its aperiodic or impulsive vibrations and vertical vibrations of the earth surface", Jour. Appl. Meth. and Mech. (1961).
18. Bustamante, J. y Flores, A. "Hydrodynamic pressure for design of dams subjected to earthquakes", Proc. ASCE, 92, No. EM5(1966).
19. Aviles, J., "Presiones hidrodinámicas en presas de gravedad", C.I.I., No. 3, (1986).
20. Newmark, N.M. y Rosenblueth, E., "Fundamentals of earthquake engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, No. J., (1971).
21. Vera, C, "Apuntes de hidrodinámica", U.A.P. (1986)
22. Maza, J.A. y García, M., "Hidrodinámica", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. D-20, (mayo 1984).
23. Sotelo, G., "Hidráulica general", Ed. Limusa, S.A., México D. F. (1974).
24. Burden, R. y Taiser, D., "Análisis numérico", Grupo Editorial Iberoamérica, (1985).
25. Heilborn, J. "Programa para ciencia e ingeniería", Osborne/Mc Gram Hill, (1982).



(figura. a.)