

MATRIZ DE RIGIDEZ DE VIGAS IMPERFECTAS

Dr. Ing. Claudio E. Jouglaud ^[1], Ing. Ana L. Perez ^[2]

Departamento de Ingeniería Civil.
Facultad Regional Buenos Aires.
Universidad Tecnológica Nacional.

^[1] Profesor Titular de Cálculo Avanzado en la FRBA-UTN. Coordinador de la Maestría en Ingeniería Estructural de la FRBA-UTN.

^[2] Docente auxiliar. Departamentos de Ingeniería Civil e Industrial de la FRBA-UTN.

RESUMEN

La introducción de pequeñas imperfecciones en la configuración de diseño puede alterar el comportamiento de una estructura. La determinación de la sensibilidad a estas imperfecciones es un tema importante pues las imperfecciones en las estructuras son inevitables y pueden resultar en un significativo deterioro de la capacidad portante de las mismas. La mayoría de los programas comerciales de elementos finitos no calculan en forma directa las matrices de rigidez de elementos de viga con imperfecciones, sino que es necesario modificar la geometría de la configuración original dando un valor finito a la magnitud de las imperfecciones que puede introducir errores.

En este trabajo se presenta un elemento finito de viga para el análisis de estructuras imperfectas. El tratamiento de las imperfecciones se efectúa asumiendo que estas son muy pequeñas respecto de una configuración de referencia perfecta. Se utiliza una formulación del tipo isoparamétrica para definir las configuraciones imperfectas y deformadas, aunque simplificada para calcular todas las integrales en la configuración perfecta.

ABSTRACT

The behavior of a structural system can be modified by the presence of small imperfections. Determination of the imperfection sensitivity is important because imperfections in structures are unavoidable and can produce an important degradation of the loading capacity of the structure. The great majority of commercial finite element programs do not compute in direct manner the stiffness matrices of beams with imperfections. Instead of that they modify the geometry of the original configuration by a finite magnitude of the imperfections, which can introduce errors.

In this work we present a beam finite element for the analysis of imperfect structures. The treatment of the imperfections is made assuming that the imperfections are very small with respect to a perfect reference configuration. An isoparametric formulation is used to define the imperfect and deformed configurations, and it is simplified to compute all integrals on the perfect configuration.

1. INTRODUCCION

El comportamiento de inestabilidad estructural se analiza usualmente mediante la determinación de las llamadas cargas críticas de pandeo. En teoría al alcanzar esta carga la estructura se desestabiliza y para cargas menores permanece en situación de equilibrio estable. Si bien este comportamiento es representativo de una gran variedad de tipologías estructurales, existen algunas estructuras laminares, como las cáscaras cilíndricas o circulares, que se desestabilizan a cargas sensiblemente inferiores¹. Es bien conocido que la causa principal de esta discordancia es la sensibilidad de estas estructuras a imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría perfecta de la estructura^{1,2,3}.

Luego el tratamiento general de los problemas de inestabilidad debe llevar en cuenta el efecto de pequeñas imperfecciones geométricas en el comportamiento estructural. Para ello debemos considerar la existencia de una configuración inicial libre de tensiones y deformaciones de la estructura aunque con una geometría levemente diferente o "imperfecta" con relación a una configuración de referencia "perfecta".

Los modelos numéricos actualmente en uso basados en elementos finitos no contemplan la posibilidad de incluir imperfecciones dentro de cada elemento. En general se recurre a modelar la estructura imperfecta mediante una simple recolocación de los nodos de la estructura perfecta (Fig. 1). Como veremos en los ejemplos mostrados esto es, en general, insuficiente para lograr una adecuada representación de estas imperfecciones en los modelos numéricos, lo cual es esencial para captar el correcto comportamiento de estas estructuras imperfectas.

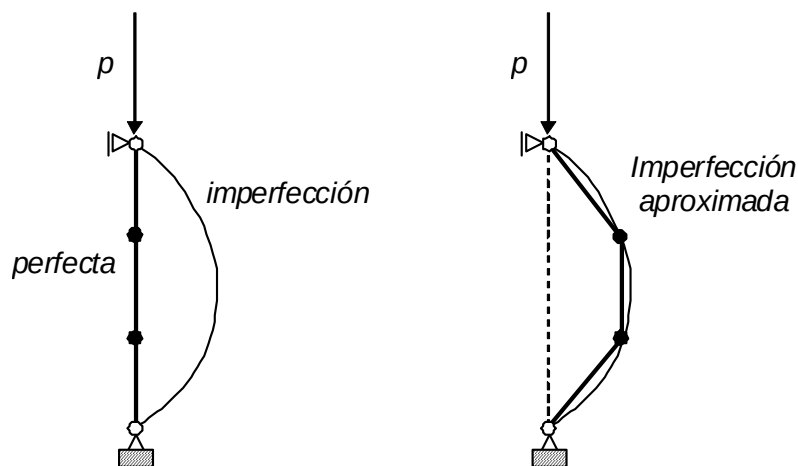


Figura 1. Aproximación de estructuras imperfectas.

El objetivo de este trabajo es la presentación de una matriz de rigidez para vigas imperfectas. Esta matriz de rigidez es bastante similar a la matriz de rigidez de una viga perfecta aunque con pequeñas modificaciones en unos pocos coeficientes. Como se verá en los ejemplos mostrados estas modificaciones son suficientes para obtener una destacada mejora en la aproximación del comportamiento.

2. REPRESENTACION APROXIMADA DE ESTRUCTURAS IMPERFECTAS

Consideremos un sistema estructural que se deforma bajo la acción de cargas adoptando diferentes configuraciones deformadas. Definimos tres tipos de configuraciones para este sistema: 1) configuración de *referencia*, 2) configuración *inicial* y 3) configuración de *deformada* (Fig.2).

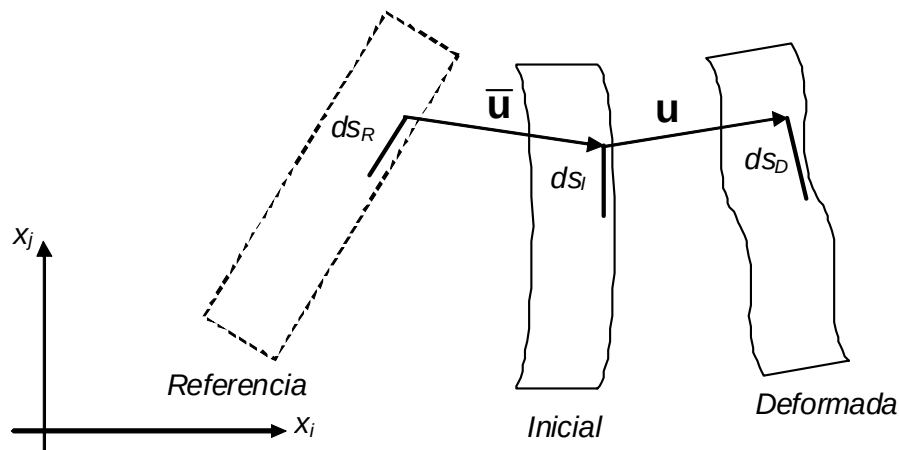


Figura 2. Aproximación de estructuras imperfectas.

La configuración *inicial* se corresponde con el estado inicial libre de cargas y tensiones, si la estructura es imperfecta esta configuración tendrá una geometría curva y compleja. La configuración *deformada* es una configuración equilibrada con el estado de cargas de la estructura. La configuración de *referencia* es una configuración de geometría simple ficticia, en el sentido que no representa un estado deformado de la estructura sino que simplemente será utilizada como un medio auxiliar para simplificar los cálculos.

Asumimos que existe una relación unívoca entre puntos materiales de estas configuraciones de manera que a un punto de una configuración le corresponde únicamente un punto en las otras. Por lo tanto podemos asumir que la configuración *inicial* se puede obtener a partir de aplicar un campo de desplazamientos de *imperfecciones* $\bar{u}$ a la configuración de *referencia*. La configuración *deformada* se obtiene aplicando los desplazamientos de *deformación* u a la configuración *inicial*.

2.1 Deformación de la estructura imperfecta

Si consideramos un segmento ds_R de longitud infinitesimal en la configuración de referencia, este segmento se corresponde con la posición ds_I en la configuración inicial y con la posición ds_D en la configuración deformada. Podemos imaginar que el segmento ds_R de la configuración de referencia fue llevado a la posición ds_I en la configuración inicial mediante la imposición del campo de desplazamientos $\bar{u}$ que deforma a la configuración de referencia de manera de transformarla en la configuración inicial. Resaltemos, que esta deformación es solo ficticia ya que la estructura se encuentra libre de deformaciones y tensiones en la configuración

inicial. Luego es posible calcular la diferencia de longitud entre estos segmentos ds_I y ds_R mediante los tensores de deformación de Green ⁴ como:

$$(ds_I)^2 - (ds_R)^2 = 2E_{ij}^{IRR} dx_i^R dx_j^R \quad (1)$$

Donde se ha empleado la convención de suma sobre índices repetidos y el superíndice R indica que las deformaciones se aplican a puntos materiales de la configuración de referencia. El tensor de deformación de Green E_{ij}^{IRR} mide las deformaciones de la configuración inicial respecto de la configuración de referencia y se define como:

$$E_{ij}^{IRR} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^R} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i^R} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_j^R} \right] \quad (2)$$

Donde $\bar{u}_i$ son las componentes del campo vectorial de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ y nuevamente se ha utilizado la convención de suma sobre índices repetidos. El superíndice R indica que las derivadas se aplican a puntos materiales de la configuración de referencia, esto es, los desplazamientos $\bar{u}_i(x_j^R)$ se deben expresar en función de las coordenadas $\mathbf{x}^R$ de puntos materiales de la configuración de referencia. Además adoptamos una convención de tres superíndices para las componentes del tensor de Green, los dos primeros indican entre que configuraciones se miden las deformaciones y el tercero indica a que configuración se refieren las coordenadas de los puntos materiales.

Luego de aplicadas las cargas el segmento ds_I de la configuración inicial pasa a ocupar la posición ds_D en la configuración deformada debido a los desplazamientos u . La diferencia de longitud entre este segmento ds_D y su correspondiente segmento ds_R en la configuración de referencia también se puede expresar mediante tensores de Green como:

$$(ds_D)^2 - (ds_R)^2 = 2E_{ij}^{DRR} dx_i^R dx_j^R \quad (3)$$

Donde el tensor de deformación de Green E_{ij}^{DRR} mide las deformaciones de la entre la configuración deformada y la configuración de referencia y se define como:

$$E_{ij}^{DRR} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\bar{u}_i + u_i)}{\partial x_j^R} + \frac{\partial (\bar{u}_j + u_j)}{\partial x_i^R} + \frac{\partial (\bar{u}_m + u_m)}{\partial x_i^R} \frac{\partial (\bar{u}_m + u_m)}{\partial x_j^R} \right] \quad (4)$$

Las deformaciones efectivas reales se obtienen de la diferencia de longitud de un mismo segmento que ocupaba la posición ds_D en la configuración deformada y ds_I en la configuración inicial. Restando las ecuaciones (1) y (3) estas deformaciones se pueden expresar como:

$$(ds_D)^2 - (ds_I)^2 = 2(E_{ij}^{DRR} - E_{ij}^{IRR}) dx_i^R dx_j^R = 2E_{ij}^{DIR} dx_i^R dx_j^R \quad (5)$$

Donde

$$E_{ij}^{DIR} = E_{ij}^{DRR} - E_{ij}^{IRR} \quad (6)$$

es el tensor de deformaciones efectivas o reales cuyas componentes se obtienen restando las ecuaciones (4) y (2) resultando

$$E_{ij}^{DIR} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j^R} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^R} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^R} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_j^R} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^R} \right] \quad (7)$$

En forma alternativa las deformaciones efectivas se pueden expresar como

$$(ds_D)^2 - (ds_I)^2 = 2E_{ij}^{DII} dx_i^I dx_j^I \quad (8)$$

Donde el tensor de deformación de Green E_{ij}^{DII} mide las deformaciones de la entre la configuración deformada y la configuración inicial pero en función de los desplazamientos de los puntos materiales de la configuración inicial:

$$E_{ij}^{DII} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j^I} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^I} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^I} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^I} \right] \quad (9)$$

El superíndice I indica que las derivadas se aplican a puntos materiales de la configuración inicial, esto es, los desplazamientos $u_i(x_j^I)$ se deben expresar en función de las coordenadas x^I de puntos materiales de la configuración inicial.

2.2 Energía de deformación de la estructura imperfecta

Asumiendo que las deformaciones sean pequeñas y que los materiales sean hiperelásticos⁴, la energía de deformación se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_I} C_{ijkl} E_{ij}^{DII} E_{kl}^{DII} dV_I \quad (10)$$

Donde C_{ijkl} son las componentes del tensor constitutivo del material y la integral se extiende a todo el volumen V_I de la configuración inicial. Notemos que esta integral puede ser muy complicada de evaluar para una estructura imperfecta pues la geometría de la configuración inicial puede ser bastante complicada. Por lo tanto es conveniente realizar una transformación de coordenadas para referir la integral anterior a la configuración de referencia cuya geometría es sencilla.

El diferencial de volumen dV_I de la configuración inicial se puede expresar como

$$dV_I = dx_1^I dx_2^I dx_3^I \quad (11)$$

Por otro lado el diferencial de volumen dV_R de la configuración de referencia se puede expresar como

$$dV_R = dx_1^R dx_2^R dx_3^R \quad (12)$$

Los diferenciales dx^I y dx^R se pueden relacionar usando la regla de la cadena:

$$dx_i^I = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^R} dx_j^R \quad (13)$$

Por lo tanto los diferenciales de volumen dV_I , dV_R se relacionan como

$$dV_I = \left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| dV_R \quad (14)$$

Donde el término entre barras es el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^I}{\partial x_1^R} & \frac{\partial x_1^I}{\partial x_2^R} & \frac{\partial x_1^I}{\partial x_3^R} \\ \frac{\partial x_2^I}{\partial x_1^R} & \frac{\partial x_2^I}{\partial x_2^R} & \frac{\partial x_2^I}{\partial x_3^R} \\ \frac{\partial x_3^I}{\partial x_1^R} & \frac{\partial x_3^I}{\partial x_2^R} & \frac{\partial x_3^I}{\partial x_3^R} \end{vmatrix} \quad (15)$$

Luego debemos expresar al tensor E_{ij}^{DII} en función de las coordenadas $\mathbf{x}^R$ de puntos materiales de la configuración de referencia. Comparando las ecuaciones (5) y (8) tenemos

$$(ds_D)^2 - (ds_I)^2 = 2E_{ij}^{DII} dx_i^I dx_j^I = 2E_{ij}^{DIR} dx_i^R dx_j^R \quad (16)$$

Los diferenciales dx^R y dx^I se pueden relacionar usando la regla de la cadena:

$$dx_i^R = \frac{\partial x_i^R}{\partial x_j^I} dx_j^I \quad (17)$$

Reemplazando en la ec.(16) resulta

$$2E_{ij}^{DII} dx_i^I dx_j^I = 2E_{kl}^{DIR} \frac{\partial x_k^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_l^R}{\partial x_i^I} dx_i^I dx_j^I \quad (18)$$

Por lo tanto las componentes del tensor E_{ij}^{DII} se pueden expresar como:

$$E_{ij}^{DII} = E_{kl}^{DIR} \frac{\partial x_k^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_l^R}{\partial x_j^I} \quad (19)$$

Finalmente sustituyendo estos tensores y el diferencial de volumen dV_I en la energía de deformación tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_I} C_{ijkl} E_{mp}^{DIR} E_{nq}^{DIR} \frac{\partial x_m^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_p^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_n^R}{\partial x_k^I} \frac{\partial x_q^R}{\partial x_l^I} \left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| dV_R \quad (20)$$

Hemos conseguido expresar la energía de deformación respecto de la configuración de referencia resultando una expresión bastante complicada. Sin embargo es posible simplificarla considerablemente si asumimos que las deformaciones de imperfección son muy pequeñas.

Notemos que las coordenadas $\mathbf{x}^R$ de un punto material en la configuración de referencia y las coordenadas $\mathbf{x}^I$ del mismo punto material pero en la configuración inicial se hallan relacionadas por los desplazamientos de imperfección como:

$$x_j^I = x_j^R + \bar{u}_j \quad (21)$$

Luego

$$\frac{\partial x_j^I}{\partial x_j^R} = \delta_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^R} \quad (22)$$

Donde δ_{ij} es el delta de Kronecker que vale 1 si los dos subíndices son iguales y 0 si son distintos. Luego si asumimos que las derivadas de los desplazamientos de imperfección son muy pequeñas tenemos

$$E_{ij}^{DII} = E_{kl}^{DIR} \frac{\partial x_k^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_l^R}{\partial x_j^I} \approx E_{ij}^{DIR} \quad (23)$$

y

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| \approx 1 \quad (24)$$

Resultando la siguiente expresión simplificada para la energía de deformación

$$U \approx \frac{1}{2} \int_{V_R} C_{ijkl} E_{ij}^{DIR} E_{kl}^{DIR} dV_R \quad (25)$$

Notemos que ahora todas las cantidades de la integral están referidas a la configuración de referencia. De aquí en adelante suprimiremos el superíndice R final

en los tensores de deformación y en las coordenadas de puntos materiales que siempre se asumirán como siendo de la configuración de referencia.

2.3 Simplificación para rotaciones moderadas y pequeñas deformaciones

El tensor de deformación de Green E_{ij} para un campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ es:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right] \quad (26)$$

que se puede expresar como⁴

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{mi} + \omega_{mi})(\varepsilon_{mj} + \omega_{mj}) \quad (27)$$

siendo ε_{ij} el tensor de deformación infinitesimal definido como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (28)$$

y ω_{ij} es el tensor de rotación infinitesimal definido como

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (29)$$

Para rotaciones moderadas es posible asumir que las deformaciones ε_{ij} son infinitésimos de orden inferior cuando comparadas con las rotaciones ω_{ij} , luego el tensor de deformación de Green para rotaciones moderadas es:

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \omega_{mj} \quad (30)$$

El tensor de deformaciones efectivas E_{ij}^{DI} es (ec.6)'':

$$E_{ij}^{DI} = E_{ij}^{DR} - E_{ij}^{IR} \quad (31)$$

Para rotaciones moderadas los tensores E_{ij}^{DR} y E_{ij}^{IR} se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} E_{ij}^{DR} &= \varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \omega_{mj} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \bar{\omega}_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \omega_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \bar{\omega}_{mj} \\ E_{ij}^{IR} &= \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \bar{\omega}_{mj} \end{aligned} \quad (32)$$

Donde

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \bar{\omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)\end{aligned}\tag{33}$$

Restando ambos tensores obtenemos el tensor de deformaciones efectivas como:

$$E_{ij}^{Dl} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \omega_{mj} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \bar{\omega}_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \omega_{mj}\tag{34}$$

Notemos que este tensor es lineal en las rotaciones de imperfección pero no lineal en las rotaciones ω_j , luego si asumimos que las deformaciones son muy pequeñas es posible aproximar este tensor como:

$$E_{ij}^{Dl} \cong \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \bar{\omega}_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \omega_{mj}\tag{35}$$

Debemos resaltar que estas simplificaciones son suficientes para el objetivo de este trabajo que consiste en obtener una formulación que represente adecuadamente las imperfecciones, para un análisis más completo de la inestabilidad de estructuras imperfectas es necesario retener los términos no lineales aquí suprimidos.

3. MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGAS IMPERFECTAS

Analizaremos las deformaciones de un elemento de viga bidimensional asumiendo las hipótesis usuales para vigas de mantenimiento de secciones planas antes y después de la deformación para relacionar la posición de un punto material P cualquiera de la viga con los desplazamientos del eje centroidal (Fig.3).

Consideremos un sistema de coordenadas local x,y fijo a la configuración indeformada de la viga con el eje x en la dirección del eje centroidal y una sección perpendicular al eje centroidal por el punto O conteniendo al punto P . Este punto P pasa a ocupar la posición P' en la configuración deformada mediante los desplazamientos u, v según los ejes locales. El punto O del eje centroidal pasa a ocupar la posición O' mediante los desplazamientos u_c, v_c . La sección conteniendo los puntos P y O realiza un giro θ asumido positivo en sentido antihorario. Luego es posible expresar a los desplazamientos u, v del punto P de coordenadas x,y como:

$$\begin{aligned}u &= u_c - y \sin \theta \\ v &= v_c - y (1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{36}$$

Asumiendo que las rotaciones sean pequeñas tenemos

$$\begin{aligned}\sin \theta &\approx \theta \approx \tan \theta = \frac{dv_c}{dx} \\ \cos \theta &\approx 1\end{aligned}\tag{37}$$

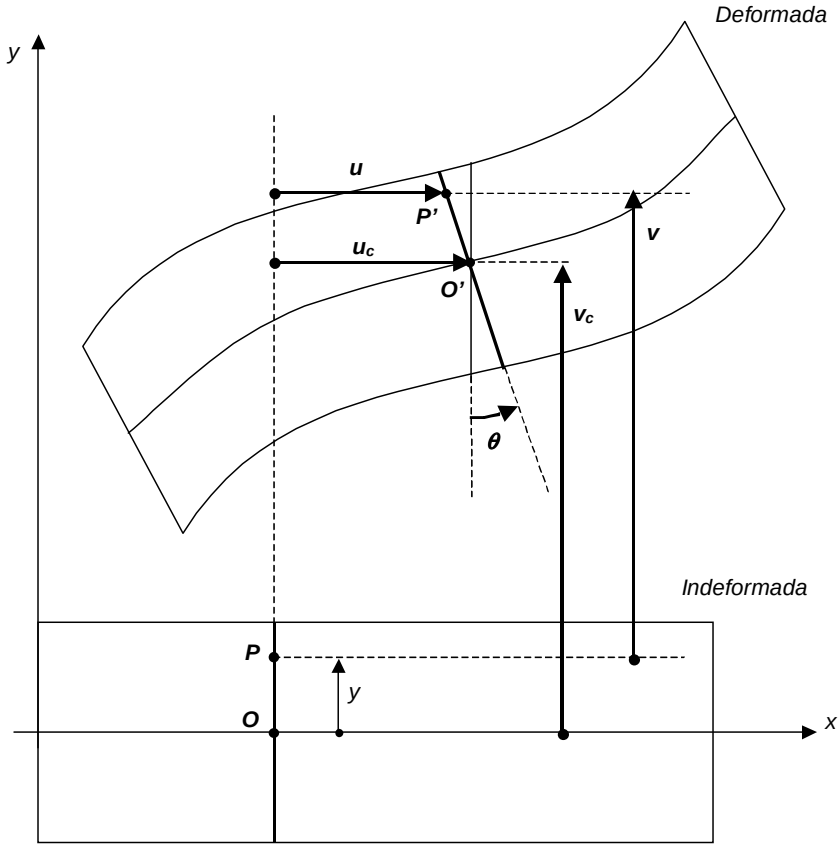


Figura 3. Desplazamientos de un punto material de una viga.

Por lo tanto es posible aproximar a los desplazamientos u , v y al giro θ en función de los desplazamientos u_c , v_c del eje centroidal como:

$$\begin{aligned} u &= u_c - y \frac{dv_c}{dx} \\ v &= v_c \\ \theta &= \frac{dv_c}{dx} \end{aligned} \quad (38)$$

Consideremos ahora un elemento finito de viga bidimensional con sus tres configuraciones, la configuración de referencia (*"ficticia"*), la configuración inicial (*"imperfecta"*) y la configuración deformada (*"equilibrada"*) (Fig. 4).

Podemos imaginar que el eje centroidal, inicialmente recto en la configuración de referencia, es llevado a una posición curva en la configuración inicial mediante un campo de desplazamientos de imperfección $\bar{u}_c(x), \bar{v}_c(x)$ el cual puede ser descrito mediante los desplazamientos nodales de imperfección $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{\theta}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{\theta}_2$ usando las clásicas funciones de forma de viga⁶ como:

$$\begin{aligned}\bar{u}_c(x) &= N_{u1}\bar{u}_1 + N_{u2}\bar{u}_2 \\ \bar{v}_c(x) &= N_{v1}\bar{v}_1 + N_{\theta1}\bar{\theta}_1 + N_{v2}\bar{v}_2 + N_{\theta2}\bar{\theta}_2\end{aligned}\quad (36)$$

Siendo las funciones de forma N_{ui} , N_{vi} y $N_{\theta i}$

$$\begin{aligned}N_{u1} &= 1 - \eta & N_{u2} &= \eta \\ N_{v1} &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 & N_{v2} &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ N_{\theta1} &= (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)L & N_{\theta2} &= (\eta^3 - \eta^2)L\end{aligned}\quad (37)$$

Siendo $\eta = x/L$, donde L es la longitud de la viga en la configuración inicial.

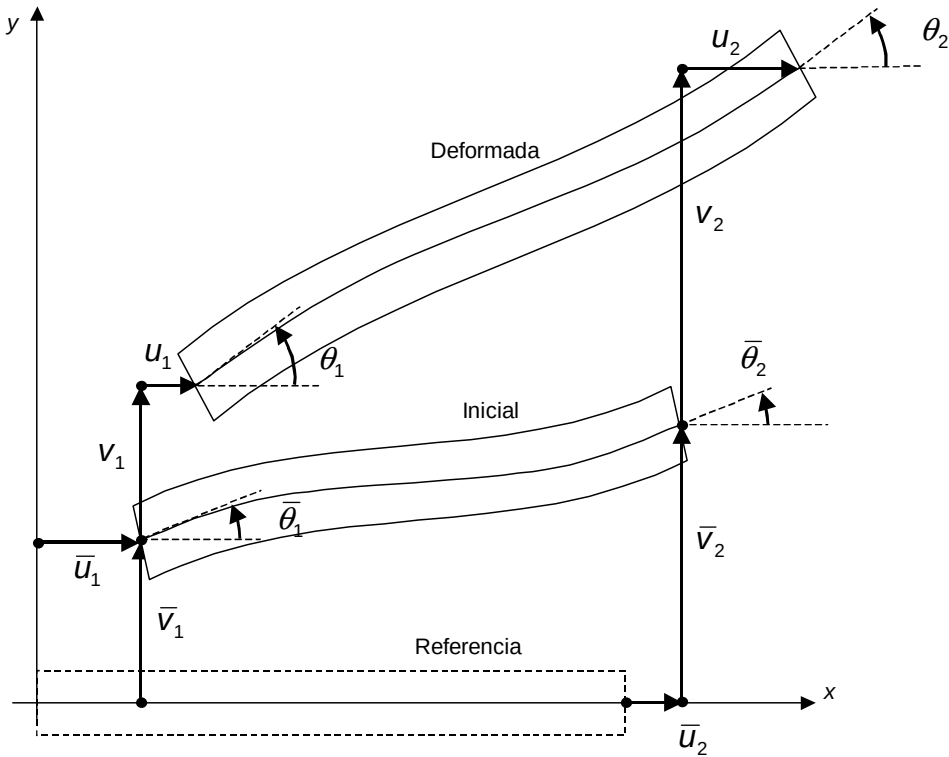


Figura 4. Elemento finito de viga imperfecta.

Asumiremos que la posición del eje centroidal en la configuración deformada se puede obtener de manera análoga respecto de la configuración inicial mediante un campo de desplazamientos de deformación $u_c(x)$, $v_c(x)$ en función de los desplazamientos nodales u_1 , v_1 , θ_1 , u_2 , v_2 , θ_2 , relativos a la configuración inicial como:

$$\begin{aligned}u_c(x) &= N_{u1}u_1 + N_{u2}u_2 \\ v_c(x) &= N_{v1}v_1 + N_{\theta1}\theta_1 + N_{v2}v_2 + N_{\theta2}\theta_2\end{aligned}\quad (38)$$

Donde hemos usado las mismas funciones de forma que en el caso anterior.

Para obtener la matriz de rigidez es necesario expresar a la energía de deformación en función de los desplazamientos nodales. Para vigas esbeltas asumiendo un estado plano de tensiones y despreciando las deformaciones por corte la única componente relevante ⁵ del tensor de deformación es la componente E_{xx} . Luego, asumiendo que los desplazamientos de imperfección sean pequeños, la energía de deformación se puede expresar respecto de la configuración de referencia (ec. 25) como:

$$U \approx \frac{1}{2} \int_{V_R} E (E_{xx})^2 dV_R \quad (40)$$

De la ecuación (35) tenemos que, para deformaciones pequeñas, el tensor de deformación E_{xx} es:

$$E_{xx} = \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \omega_{xy} \bar{\omega}_{xy} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{xy} \omega_{xy} = \varepsilon_{xx} + \omega_{xy} \bar{\omega}_{xy} \quad (41)$$

Donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \bar{\omega}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Usando las relaciones (38) es posible expresar estas derivadas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du_c}{dx} - y \frac{d^2 v_c}{dx^2} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{d\bar{v}_c}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dv_c}{dx} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= \frac{d\bar{v}_c}{dx} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{dv_c}{dx} \end{aligned} \quad (43)$$

Luego el tensor de deformación E_{xx} resulta

$$E_{xx} = \frac{du_c}{dx} - y \frac{d^2 v_c}{dx^2} + \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} \quad (44)$$

Sustituyendo en la energía de formación resulta

$$U = \frac{E}{2} \int_L \int_A \left(\left(\frac{du_c}{dx} \right)^2 + y^2 \left(\frac{d^2 v_c}{dx^2} \right)^2 - 2y \frac{du_c}{dx} \frac{d^2 v_c}{dx^2} + 2 \frac{du_c}{dx} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} - 2y \frac{d^2 v_c}{dx^2} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} + \left(\frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} \right)^2 \right) dA dx \quad (45)$$

Donde A es el área de la sección transversal y L es la longitud de la viga en la configuración de referencia.

Asumiendo a los ejes x , y como ejes principales de inercia de la sección, tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \int_A y dA &= 0 \\ \int_A y^2 dA &= I \end{aligned} \quad (46)$$

Donde I es el momento de inercia de la sección.

Luego si consideramos que los desplazamientos de imperfección son muy pequeños podemos despreciar el último término en la expresión de la energía de deformación que finalmente queda como:

$$U = \frac{E}{2} \int_L \left(A \left(\frac{du_c}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2 v_c}{dx^2} \right)^2 + 2A \frac{du_c}{dx} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} \right) dA \quad (47)$$

Luego si sustituimos los desplazamientos centroidales en función de los desplazamientos nodales, de las ecuaciones (36) y (38), la energía de deformación queda expresada como una función de estos desplazamientos.

3.1 Matriz de rigidez imperfecta

Los coeficientes k_{ij} de la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ de un elemento finito con desplazamientos nodales d_i se obtienen derivando dos veces la energía de deformación respecto de los desplazamientos nodales como:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial d_i \partial d_j} \quad (48)$$

Ordenando los desplazamientos nodales de deformación en un vector $\mathbf{d}$ como:

$$\mathbf{d} = \{d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6\}^t = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2\}^t \quad (49)$$

tenemos que la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ de la viga imperfecta es

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} c1 & -c6 & -c7 & -c1 & c6 & -c8 \\ -c6 & c5 & c4 & c6 & -c5 & c4 \\ -c7 & c4 & c3 & c7 & -c4 & c2 \\ -c1 & c6 & c7 & c1 & -c6 & c8 \\ c6 & -c5 & -c4 & -c6 & c5 & -c4 \\ -c8 & c4 & c2 & c8 & -c4 & c3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

donde

$$\begin{aligned} c1 &= \frac{EA}{L} & c2 &= 2 \frac{EI}{L} & c3 &= 4 \frac{EI}{L} \\ c4 &= 6 \frac{EI}{L^2} & c5 &= 12 \frac{EI}{L^3} \end{aligned} \quad (51)$$

y los coeficientes $c6$, $c7$, $c8$ dependen de los desplazamientos de imperfección y valen

$$\begin{aligned} c6 &= \frac{EA}{10L^2} [12(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + L(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)] \\ c7 &= \frac{EA}{30L} [3(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + L(4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)] \\ c8 &= \frac{EA}{30L} [3(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + L(-\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2)] \end{aligned} \quad (52)$$

Siendo L la longitud del elemento recto de la configuración de referencia.

Notemos que si los desplazamientos de imperfección son nulos estos coeficientes se anulan y se obtiene la clásica matriz de rigidez para vigas ⁶.

3.1 Matriz de rigidez imperfecta rotacional

Notemos que hemos supuesto en las aproximaciones que los desplazamientos de imperfección eran muy pequeños, por lo tanto cuanto más próxima esté la configuración de referencia respecto de la configuración inicial mejor será la aproximación. Luego es posible definir una configuración de referencia más cercana, que llamaremos configuración de referencia rotacional, de manera que las imperfecciones respecto de esta configuración sean solo rotacionales (Fig. 5).

Notemos que sólo necesitamos la información de los desplazamientos de imperfección respecto de la configuración de referencia para definir las rotaciones de imperfección respecto de la configuración de referencia rotacional.

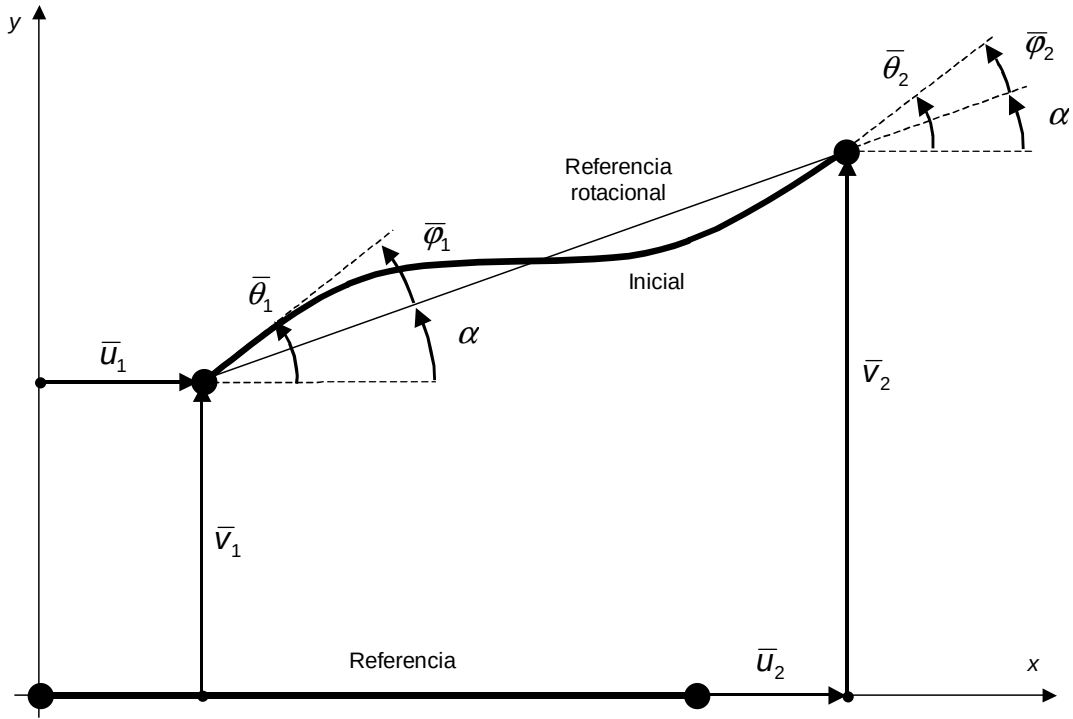


Figura 5. Elemento finito imperfecto rotacional.

Luego asumiendo que las rotaciones de imperfección son muy pequeñas pueden aproximarse como:

$$\bar{\varphi}_1 \approx \tan \bar{\varphi}_1 = \tan(\bar{\theta}_1 - \alpha) = \frac{\tan \bar{\theta}_1 - \tan \alpha}{1 + \tan \bar{\theta}_1 \tan \alpha} \quad (53)$$

$$\bar{\varphi}_2 \approx \tan \bar{\varphi}_2 = \tan(\bar{\theta}_2 - \alpha) = \frac{\tan \bar{\theta}_2 - \tan \alpha}{1 + \tan \bar{\theta}_2 \tan \alpha}$$

siendo

$$\tan \alpha = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{L + \bar{u}_2 - \bar{u}_1} \quad (54)$$

Donde L es la longitud de la viga en la configuración de referencia.

Luego la matriz de rigidez $\mathbf{K}_r$ de la viga imperfecta utilizando la configuración de referencia rotacional es

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} c1 & -c6 & -c7 & -c1 & c6 & -c8 \\ -c6 & c5 & c4 & c6 & -c5 & c4 \\ -c7 & c4 & c3 & c7 & -c4 & c2 \\ -c1 & c6 & c7 & c1 & -c6 & c8 \\ c6 & -c5 & -c4 & -c6 & c5 & -c4 \\ -c8 & c4 & c2 & c8 & -c4 & c3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

donde

$$\begin{aligned} c1 &= \frac{E A}{L_r} & c2 &= 2 \frac{E I}{L_r} & c3 &= 4 \frac{E I}{L_r} & (56) \\ c4 &= 6 \frac{E I}{L_r^2} & c5 &= 12 \frac{E I}{L_r^3} \end{aligned}$$

y los coeficientes $c6$, $c7$, $c8$ dependen de los desplazamientos de imperfección y valen

$$\begin{aligned} c6 &= \frac{E A}{10 L_r} (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) & (57) \\ c7 &= \frac{E A}{30} (4 \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2) \\ c8 &= \frac{E A}{30} (-\bar{\varphi}_1 + 4 \bar{\varphi}_2) \end{aligned}$$

Siendo L_r la longitud del elemento recto de la configuración de referencia rotacional que vale:

$$L_r = \sqrt{(L + \bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2 + (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2} \quad (58)$$

Notemos nuevamente que si los desplazamientos de imperfección son nulos se obtiene la clásica matriz de rigidez para vigas ⁶.

7. EJEMPLO: VIGA CON IMPERFECCIÓN PARABÓLICA

Analizaremos una viga simplemente apoyada idealmente recta que presenta una imperfección en la forma de arco parabólico con relación flecha/luz = 0.1 y con una carga concentrada al medio (Fig. 6)

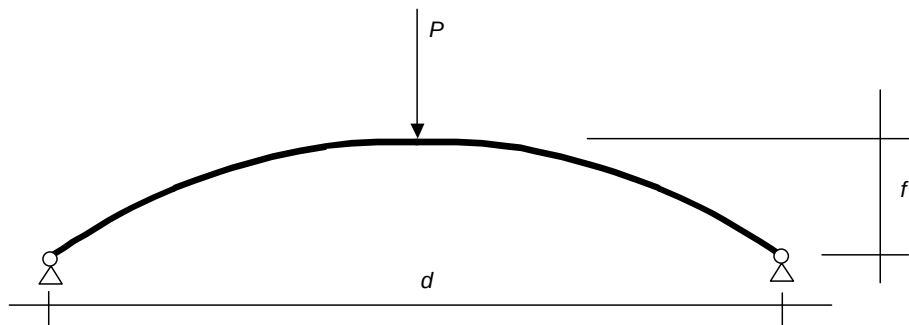


Figura 6. Viga con imperfección parabólica.

Adoptamos las siguientes propiedades para la viga: $E=2100000 \text{ kg/cm}^2$, $A=34.9 \text{ cm}^2$, $I=1320 \text{ cm}^4$, $d=3 \text{ m.}$, $f=0.3 \text{ m.}$ Para la carga adoptamos el valor $P=4928 \text{ kg.}$ que nos daría un descenso de 1 cm. en el centro si la viga fuese perfectamente recta.

Por simetría solo analizamos una mitad de la viga y consideramos tres aproximaciones usando diferentes configuraciones de referencia (Fig. 7).

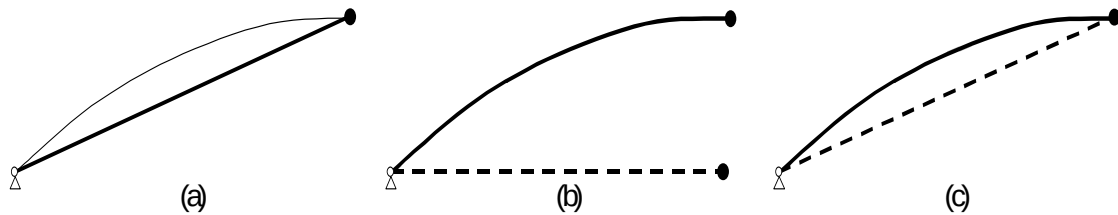


Figura 7. Aproximaciones con diferentes configuraciones de referencia.

En todos los casos hemos indicado con línea de trazos a la configuración de referencia y con línea llena gruesa indicamos la configuración inicial adoptada. En el caso (a) que es el usualmente implementado en los programas de cálculo actuales las dos configuraciones son coincidentes y no se tiene una buena aproximación de la geometría. En el caso (b) la configuración de referencia se ha tomado horizontal en coincidencia con una viga idealmente recta y la configuración inicial lleva en cuenta la geometría curva del arco como imperfecciones. En el caso (c) se ha adoptado una configuración de referencia rotacional y también se considera la geometría curva de la configuración inicial.

Analizamos el comportamiento utilizando diferentes discretizaciones con un número variable n de elementos finitos en la mitad de la viga. En la tabla 1 se muestra la convergencia del descenso en el centro y la rotación en el apoyo para las distintas formulaciones.

Tabla 1. Descenso central y rotación en el apoyo para diferentes formulaciones.

n	Configuración de referencia					
	convencional		horizontal		rotacional	
	descenso	rotación	descenso	rotación	descenso	rotación
1	1.6589E-01	1.5951E-03	1.0000E+00	-1.0000E-02	1.2532E-01	6.7136E-04
2	1.3905E-01	8.7187E-04	7.0776E-02	2.6907E-03	1.3254E-01	6.6685E-04
3	1.3523E-01	7.6157E-04	7.4646E-02	2.1540E-03	1.3250E-01	6.7587E-04
4	1.3397E-01	7.2441E-04	1.2948E-01	2.1533E-03	1.3246E-01	6.7730E-04
5	1.3341E-01	7.0745E-04	1.5864E-01	2.1836E-03	1.3244E-01	6.7763E-04
10	1.3266E-01	6.8507E-04	2.0726E-01	2.2551E-03	1.3242E-01	6.7772E-04
20	1.3248E-01	6.7951E-04	2.2247E-01	2.2810E-03	1.3242E-01	6.7768E-04
100	1.3242E-01	6.7774E-04	2.2772E-01	2.2903E-03	1.3241E-01	6.7767E-04
200	1.3242E-01	6.7768E-04	2.2789E-01	2.2906E-03	1.3241E-01	6.7767E-04
exacto	1.3241E-01	6.7767E-04	1.3241E-01	6.7767E-04	1.3241E-01	6.7767E-04

En la tabla 2 se muestra la convergencia de la reacción horizontal en el apoyo y del momento en el centro para las distintas formulaciones.

Notemos que la formulación convencional debe converger a la solución exacta ya que en el límite representa la geometría en forma exacta. Lo mismo ocurre con la formulación rotacional. Por otro lado, la formulación con configuración de referencia horizontal converge hacia valores inexactos, a pesar de llevar en cuenta la geometría curva de la configuración inicial. Esto es debido a que con el aumento de la discretización no se consigue disminuir el efecto de las imperfecciones que

continúan siendo grandes respecto de la configuración de referencia sin importar la cantidad de elementos utilizados, en contraposición a las hipótesis asumidas.

Tabla 2. Reacción horizontal en apoyo y momento central para diferentes formulaciones.

n	Configuración de referencia					
	convencional		horizontal		rotacional	
	reacción	momento	reacción	momento	reacción	momento
1	10393	57810	83650	369600	8869	103522
2	8992	99844	11892	135076	8626	110823
3	8770	106499	1045	180265	8604	111467
4	8695	108756	2965	198217	8601	111571
5	8660	109789	5080	207787	8600	111597
10	8615	111154	8577	223628	8600	111608
20	8604	111493	9666	228542	8600	111607
100	8600	111601	10041	230232	8600	111606
200	8600	111605	10052	230286	8600	111606
exacto	8600	111606	8600	111606	8600	111606

Además, notemos la gran precisión de la formulación rotacional respecto de la formulación convencional con pocos elementos. Con 3 ó 4 elementos se obtienen valores prácticamente exactos, tanto en desplazamientos como en esfuerzos, mientras que para la formulación convencional son necesarios alrededor de 20 elementos para obtener una precisión similar.

Si graficamos en escala logarítmica la variación del error porcentual en el desplazamiento central con el número de elementos finitos utilizados se obtienen rectas con la misma inclinación, o sea con la misma velocidad de convergencia. Sin embargo la formulación rotacional presenta errores porcentuales sistemáticamente menores en 2 ordenes.

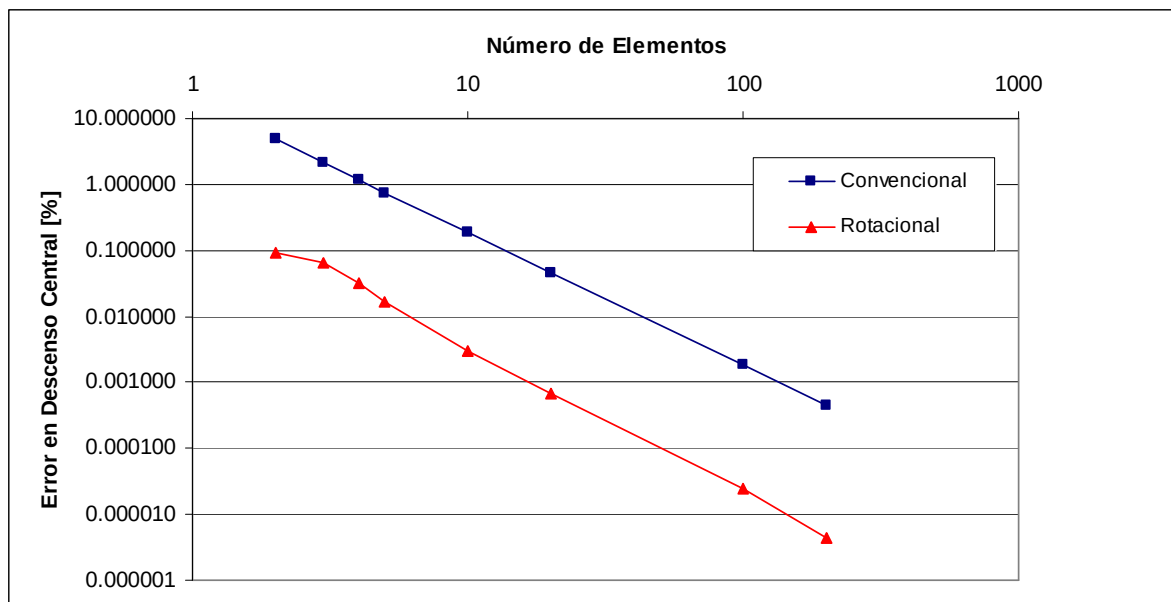


Figura 8. Convergencia de las diferentes formulaciones para el descenso central.

Esto significa que para la misma cantidad de elementos los valores aproximados obtenidos con la formulación rotacional tienen 2 cifras más de coincidencia con los valores exactos que la formulación convencional.

8. CONCLUSIONES

La formulación rotacional aquí propuesta puede representar mas adecuadamente el comportamiento de estructuras curvas o imperfectas que utilizando la formulación convencional que aproxima la geometría con segmentos rectos.

Se debe notar que las modificaciones a realizar en las matrices de rigidez son mínimas. La matriz de rigidez convencional viene dada por la ec.(55) con $C_7=0$, $C_8=0$ y $C_9=0$. Para la matriz de rigidez rotacional hay que adoptar los coeficientes C_7 , C_8 , C_9 dados por las ecuaciones (57).

Si bien la formulación presentada está orientada a vigas cuya geometría inicial curva proviene de imperfecciones se puede aplicar sin modificaciones, como en el ejemplo mostrado, a vigas con forma de arco u otras geometrías curvas.

Se debe resaltar que si bien se analizan estructuras curvas no se ha utilizado ninguna teoría particular para elementos curvos, simplemente se ha establecido que la curvatura inicial se ha obtenido de deformar un elemento inicialmente recto utilizando las mismas funciones de forma que para los desplazamientos. Esto es lo que usualmente se conoce como formulación *isoparamétrica*⁸, sin embargo a diferencia de esta formulación se han simplificado las integrales para efectuarlas sobre las configuraciones de referencia sin necesidad de utilizar integración numérica⁸. Luego la formulación aquí presentada abre nuevas posibilidades para el tratamiento simplificado de elementos finitos curvos.

9. REFERENCIAS

1. Galambos T.V., (1998), *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, John Wiley, New York.
2. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1973), *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London.
3. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1984), *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley, London.
4. Fung Y.C., (1965), *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
5. Jouglaud C.E., (1993), *Análisis no lineal incremental asintótico de la estabilidad de estructuras elásticas*, Tesis de Maestría en Ingeniería Civil, COPPE-UFRJ, Río de Janeiro, Brasil.
6. Cook R.D, Malkus D.S. y Plesha M.E., (1989), *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, New York.
7. Hughes T.J.R., (1987), *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs.
8. Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L., (1989), *The Finite Element Method – Vol.1 Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill Book Co.