FORMULA UNIFICADA PARA LA EVALUACION DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN ESTÁTICA EN ESTRUCTURAS

Hugo Félix Begliardo
Ingeniero Civil
Rafaela (Santa Fe)

Prof. Asoc. Análisis Estructural I- Universidad Tecnológica Nacional-F.R.Rafaela
Ex – docente Universidad Nacional de Salta y Universidad Católica de Salta

Resumen

El Método de las Fuerzas y el de los Desplazamientos constituyen los dos grandes métodos del Análisis Estructural. Al abordar la resolución de un problema por el primero de ellos, el número de vínculos en exceso que tiene la estructura, respecto de los necesarios para permanecer en equilibrio, es conocido como "grado de indeterminación estática". De resolverlo por el segundo de los métodos, la indeterminación es cinemática, está vinculada a los desplazamientos independientes de los nudos de la estructura y se la conoce como "grados de libertad".

Evaluar la indeterminación cinemática es sencillo a partir del conteo e identificación de los tipos de nudos de la estructura, independientemente del sistema estructural, en tanto que para la estática, prácticamente la totalidad de los autores proponen fórmulas o técnicas que tratan de manera separada a los sistemas de alma llena y los reticulados.

El objetivo de este trabajo es presentar y fundamentar académicamente una fórmula que ofrece un tratamiento unificado para la evaluación del grado de indeterminación estática en sistemas estructurales planos, y su correspondiente para sistemas espaciales, basada en una sencilla modificación a las conocidas fórmulas del Prof. Kurt Beyer, acompañados de ejemplos que validan la propuesta.

Abstract

Force and Displacement Methods are the two main methods in Structural Analysis. When trying to solve a problem using the first one, the number of redundant links in the structure as regards the necessary ones to stay in equilibrium, is known as "degree of static indeterminacy". If it is solved using the second method, the indeterminacy is kinematic, it is related to the independent displacements of the structure nodes and it is known as "degrees of freedom."

It is quite simple to evaluate kinematic indeterminacy by counting and identifying the types of structure nodes, regardless of the structural system, whereas in the case of static indeterminacy, almost all authors suggest formulae or methods that deal separately with frames and lattices systems.

The objective of this work is to describe a formula that offers a unified treatment to evaluate the degree of static indeterminacy in planar structural systems, and the corresponding ones for spatial systems, based on a simple modification of well-known Professor Kurt Beyer`s formulae. Examples are supplied to validate the proposal.

1. Introducción

La importancia relativa entre las dimensiones de un elemento estructural, da lugar a las conocidas tres categorías en las que se simplifica la clasificación de las estructuras: 1) estructuras lineales; 2) estructuras de superficie; 3) estructuras volumétricas. En una cuarta categoría se puede incluir a las estructuras mixtas o compuestas, combinación de las mencionadas.

La respuesta de una estructura frente a acciones exteriores que perturban su estado inicial, quedará expresada a partir del conocimiento de las fuerzas que la solicitan en todo punto de su dominio y los desplazamientos asociados a ellas.

La correspondencia fuerza-desplazamiento es plena, al punto tal que conocido uno de ellos es posible determinar el otro, y viceversa. Esta íntima relación ha dado origen a los grandes métodos del análisis estructural, el Método de las Fuerzas y el Método de los Desplazamientos.

En el Método de las Fuerzas las incógnitas son fuerzas. Para su resolución se recurre al planteo de la compatibilidad de los desplazamientos. En el de los Desplazamientos las incógnitas son desplazamientos, y se los halla a partir del planteo de la situación equilibrada de fuerzas que provoca un estado congruente y compatible de desplazamientos.

Al abordar la resolución de un problema por el primero de ellos, el número de vínculos en exceso que tiene la estructura, respecto de los necesarios para permanecer en equilibrio, es conocido como "*grado de indeterminación estática*". De resolverlo por el segundo de los métodos, la indeterminación es cinemática, está vinculada a los desplazamientos independientes de los nudos de la estructura (traslaciones y rotaciones) y se la conoce como "*grados de libertad*".

La evaluación del grado de indeterminación cinemática en estructuras lineales responde a un procedimiento sencillo que se circunscribe a identificar los tipos de nudos y contar los grados de libertad asociados a ellos, lo cual implica considerar al sólido en su realidad de deformable. En lo que concierne a la evaluación del grado de indeterminación estática, se practica bajo la *hipótesis del sólido rígido,* es decir, considerando la invariabilidad de la distancia mutua entre dos puntos cualesquiera pertenecientes a su dominio. En esta evaluación, prácticamente la totalidad de los autores proponen fórmulas o técnicas que tratan de manera separada a los sistemas de alma llena y de reticulado.

El objetivo de este trabajo es presentar y fundamentar una fórmula que ofrece un tratamiento unificado para la evaluación del grado de indeterminación estática en sistemas estructurales planos de barras, y su correspondiente para sistemas espaciales, basada en una sencilla variante aplicada a las expresiones dadas por el Prof. Kurt Beyer[1], acompañados de ejemplos que validan la propuesta.

2. Las estructuras lineales

La *barra* o pieza prismática es el componente distintivo de las estructuras lineales y viene a ser un caso particular de la *chapa* (Figura 1.a,b). Puede presentarse *aislada*, con configuración recta o curva, o *asociada* con otras barras a través de *conexiones* adecuadas. En la Figura 2 se grafica e identifica el modo común con que suele clasificarse a estas últimas.

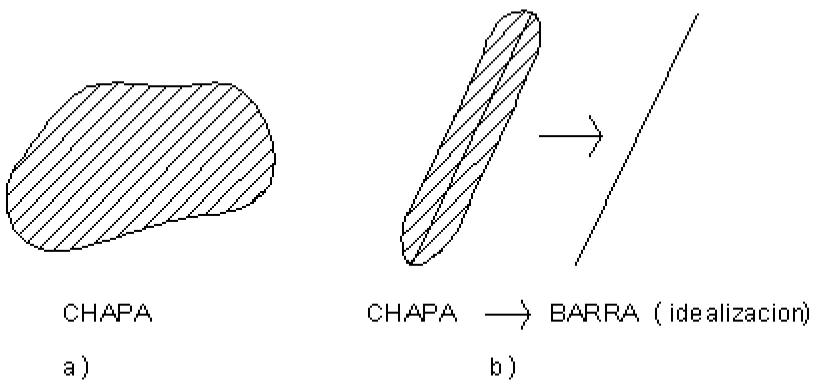


Figura 1. a) la chapa; b) la barra, caso particular de la chapa

La respuesta de una estructura (fuerzas, desplazamientos) es buscada en los *nudos* de la misma, por cuanto a partir de ellos es posible determinarla en cualquier otro punto de interés de su dominio. En estructuras lineales se entiende por nudo a:

a) Todo punto en el que se intersectan dos o más miembros. Esto es, a las uniones articuladas, rígidas o combinadas
b) Todo punto de apoyo o vinculación de la estructura a tierra.
c) Los extremos libres de las barras.
d) Todo cambio brusco de la sección en el tramo de una barra.

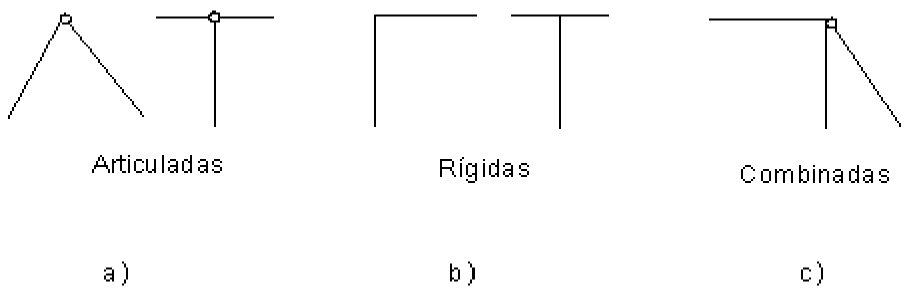


Figura 2. Tipos de conexiones entre barras

Los sistemas estructurales de barra pueden estar dispuestos tanto en el plano como en el espacio, de allí que se los clasifique en *sistemas planos* o bidimensionales y *sistemas espaciales* o tridimensionales.

Los sistemas estructurales planos se caracterizan porque, tanto la estructura como las fuerzas actuantes son coplanares. Los sistemas estructurales espaciales se distinguen por la presencia de fuerzas actuantes no coplanares a la estructura, pudiendo ser ésta de configuración bi o tridimensional. En Tabla 1 se incluye la denominación más común dada a las formas estructurales que quedan comprendidas en una y otra clasificación.

La subdivisión en sistemas de alma llena o de reticulado está vinculada al tipo de solicitaciones internas (Mf, Q, N, Mt) que se evidencian para restituir el equilibrio, de practicarse una sección en cualquier parte del dominio, lo que a veces supone la adopción de hipótesis que implican despreciar algunos esfuerzos, como en el caso de los reticulados, en los que se asume la ausencia de rozamiento en las uniones articuladas. Los sistemas mixtos o compuestos consisten en combinaciones de los otros dos.

Tabla 1. Clasificación de los sistemas estructurales de barra

Sistemas planos de barras	Sistemas espaciales de barras
1. Sistemas de alma llena 1.1 Vigas 1.1.1 Aisladas 1.1.2 Cadenas cinemáticas 1.1.2.1 Abiertas 1.1.2.2 Cerradas 1.2 Pórticos o marcos planos. 2. Sistemas de reticulado 2.1 Armaduras o reticulados planos 3. Sistemas mixtos	1. Sistemas de alma llena 1.1 Emparrillados 1.2 Pórticos o marcos espaciales 2. Sistemas de reticulado 2.1 Armaduras o reticulados espaciales 3. Sistemas mixtos

3. Evaluación del grado de indeterminación estática en sistemas planos de barras

Esta indeterminación se asocia al número de enlaces externos o internos que tiene la estructura considerada rígida. Los grados de libertad de una estructura son la expresión (cuantificación) del número mínimo de coordenadas independientes con las cuales se puede establecer la configuración (forma, posición) de un cuerpo y sus partes componentes. Toda restricción al desplazamiento de una estructura implica anular uno o más de sus grados de libertad.

Un sistema discreto de dos partículas en el plano, con distancia mutua invariable, posee tres grados de libertad, entendiendo aquí por partícula al *cuerpo puntual* del que sólo importa su capacidad de trasladarse[2]. Ello sienta las bases del concepto de sólido rígido, de lo cual se tiene que una barra rígida aislada en el plano, al igual que la chapa, posee tres grados de libertad.

Las chapas o barras se vinculan a tierra a través de apoyos de primera, segunda o tercera especie[3], los cuales les restan uno, dos y tres grados de libertad, respectivamente. Internamente las chapas pueden vincularse entre sí mediante articulaciones y las barras a través de articulaciones o conexiones rígidas. Las articuladas restringen dos grados de libertad y las rígidas tres grados de libertad. En correspondencia con cada uno de estos vínculos se pondrán de manifiesto tantos esfuerzos de restricción como grados de libertad impedidos.

3.1. Expresiones usuales

Es común que en los libros de textos de enseñanza de grado se separe el análisis de los sistemas de alma llena de los de reticulado. En relación a los primeros y tratándose de vigas dispuestas de manera aislada o asociada en cadenas cinemáticas abiertas, el grado de indeterminación se evalúa como

$$r - (n+2) = h_e \tag{1}$$

siendo

r = número de restricciones que impone el conjunto de apoyos externos.
n = número de chapas.
h_e = Grado de indeterminación estática.
Si $h_e = 0$: isostática o determinada.
$h_e < 0$: hipostática o inestable.
$h_e > 0$: hiperestática de grado "h".

En presencia de cadenas cinemáticas cerradas, se evalúa del siguiente modo

$$r - n = h_e \tag{2}$$

El hecho de que h_e sea ≥ 0 es condición *necesaria* pero *no suficiente* para garantizar la estabilidad de la estructura, por cuanto también es menester que se asegure tanto la eficacia como la adecuada distribución de los apoyos a fin de que no existan vínculos aparentes.

En los tipos estructurales comprendidos dentro del concepto de "vigas", la indeterminación es exclusivamente de índole externa o también llamada por *vínculo externo*. Esta distinción es necesaria para diferenciarla de la indeterminación por *vínculo interno* que también se puede presentar en pórticos y en sistemas de reticulado. En relación a los reticulados, la indeterminación por vínculo externo surge de aplicar (1), en tanto que la interna se evalúa a partir de la llamada *condición de rigidez*:

$$b - (2v - 3) = h_i \; ; \qquad h_i \geq 0 \tag{3}$$

siendo
b = número de barras.
v = número de vértices.
h_i = Indeterminación por vínculo interno

Como ocurre con este tipo de expresiones, no es suficiente que se verifique (3), sino que se exige que las barras se hallen convenientemente distribuidas a fin de que no se presenten cadenas cinemáticas que le lleven a perder la condición de chapa única y rígida que supone la ecuación.

El *grado de indeterminación estática total,* h*,* estará dado por la suma de (1) más (3):

$$h = h_e + h_i \tag{4}$$

Al tratar con pórticos y sistemas mixtos, la evaluación se torna un poco más compleja por cuanto también aparecen, como en los reticulados, indeterminaciones por vínculo interno que conducen a tornar insuficientes las expresiones anteriores. Una de las más completas se debe a Kurt Beyer (ob cit), quien resumió la evaluación del grado de indeterminación estática, tanto por vínculo externo como interno, del siguiente modo

$$h = (S_4 + 2S_5 + 3S_6 + t) - (2K_2 + 3K_3) \qquad (5)$$

siendo

S_4, S_5, S_6 = Sistemas libres abiertos (chapas). El subíndice designa el número de esfuerzos que se evidencian en cada nudo para restituir las condiciones de equilibrio estático. En sistemas abiertos con vínculos rígidos en sus extremos corresponde S_6; si un extremo está articulado, S_5; para dos extremos articulados, S_4.

K_2, K_3 = Nudos del sistema dado que vinculan las chapas entre sí. El subíndice indica en número de solicitaciones que se evidencian en el nudo de unión para restituir el equilibrio de fuerzas. Luego, para nudos rígidos corresponde K_3; para articulados, K_2.

t = Número de barras no cargadas entre articulaciones, tales como tensores, anclajes, soportes auxiliares, bielas.

3.2. Expresión propuesta

En la ecuación (6) se introduce una sencilla modificación en el modo de presentar la (5), lo que permite dar libertad al evaluador de elegir de manera más amplia y desestructurada sus sistemas libres o chapas, desentendiéndose de la naturaleza de las solicitaciones a las que pueden verse expuestos, como es el caso de los tensores "t" o el de las barras de reticulado.

$$h = [S_4 + 2S_5 + 3S_6 + \ldots + (i-3)S_i] - (2K_2 + 3K_3) \qquad (6)$$

donde S_4, S_5, S_6, K_2 y K_3 tienen los mismos significados que los expresados para (5). La variante radica en la introducción del sumando (i – 6) S_i, cuyo subíndice tendría como único límite el impuesto por el evaluador al escoger las chapas.

3.2.1. Fundamentos

La condición de estabilidad revela que, de punto a punto, toda estructura deberá encontrarse en equilibrio ante las acciones externas. En función de ello, de seccionársela en partes se obtendrán sendas porciones de estructuras equilibradas, evidenciándose en cada partición las solicitaciones internas (esfuerzos característicos) restitutorios del estado estable (Figura 3.a,b). Esta afirmación permite descomponer al sistema en chapas aisladas (barras rectas o curvas, lineales o ramificadas) del modo más convenientemente y sujeto, en cierta medida, al arbitrio del operador. Lo aconsejable es desmembrarla en correspondencia con las articulaciones y abrir los marcos cerrados (Figura 3.c).

En la Figura 4 se presentan algunos casos, entre los ilimitados posibles, de tipos de chapas aisladas en las que puede desmembrarse un sistema dado, junto a las solicitaciones que se ponen de manifiesto en sus extremos. Las estructuras tipo biela o tensores son incluidos dentro de los sistemas S_4 puesto que el fundamento de (6) se sustenta en los movimientos de nudo que impiden los enlaces de la barra o chapa, sean estos externos o internos, y en las potenciales reacciones de vínculo a lo que ello da lugar, independientemente de sus configuraciones, cargas, usos o funciones.

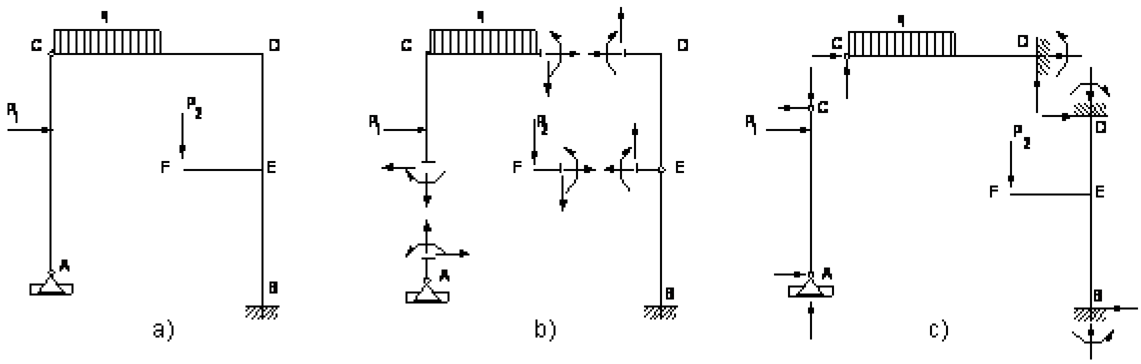


Figura 3. La estructura y el equilibro de las partes

La estática proporciona tres ecuaciones generales de equilibrio por lo que, por aplicación de (1), para cada chapa aislada el grado de indeterminación será

$$h = i - 3 \tag{7}$$

siendo

i = número de solicitaciones de vínculo de la barra o chapa aislada del sistema.

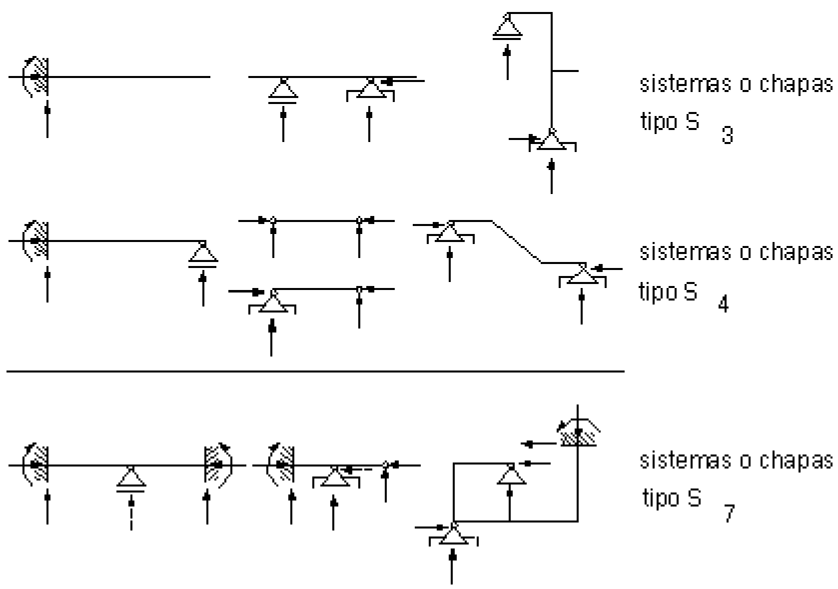


Figura 4. Sistemas aislados

Ello permite construir la Tabla 2.

Tabla 2. Grado de indeterminación de sistemas aislados Si

Tipo de Sistema S_i	N° de solicitaciones reactivas i	N° de ecuaciones disponibles	Grado de indeterminación del sistema (h= i-3)
S_3	3	3	0
S_4	4	3	1
S_5	5	3	2
S_6	6	3	3
S_7	7	3	4
…..	…..	…..	…..
S_i	i	3	(i-3)

La suma de las indeterminaciones de cada una de las chapas en las que se descompone un sistema dado es

$$h_1 = S_4 + 2S_5 + 3S_6 + \ldots + (i-3)S_i \qquad (8)$$

Al ensamblar la estructura para volverla a su configuración original, la estática provee un grupo de ecuaciones auxiliares que garantizan el equilibrio de los nudos y disminuye el grado de indeterminación. De ello, en nudos rígidos (K_3) podrán plantearse tres ecuaciones, dos de proyección y una de momentos ó tres de momentos, y en los articulados (K_2) dos de proyección. El número total de ecuaciones auxiliares será

$$n_{aux} = (3K_3 + 2K_2) \qquad (9)$$

componiendo ambas se obtiene el segundo miembro de la (6). Luego

$$h = h_1 + n_{aux} = [S_4 + 2S_5 + 3S_6 + \ldots + (i-3)S_i] - (3K_3 + 2K_2) \qquad (10)$$

3.2.2. Ejemplos de aplicación

En la Figura 5.a se tiene un sistema tipo $S_{3,}$ isostático. En Figura 5.b se sustituyeron los apoyos por bielas, a partir de lo cual se generaron vínculos internos tipo K_2. Se arriba al mismo resultado por aplicación de (6).

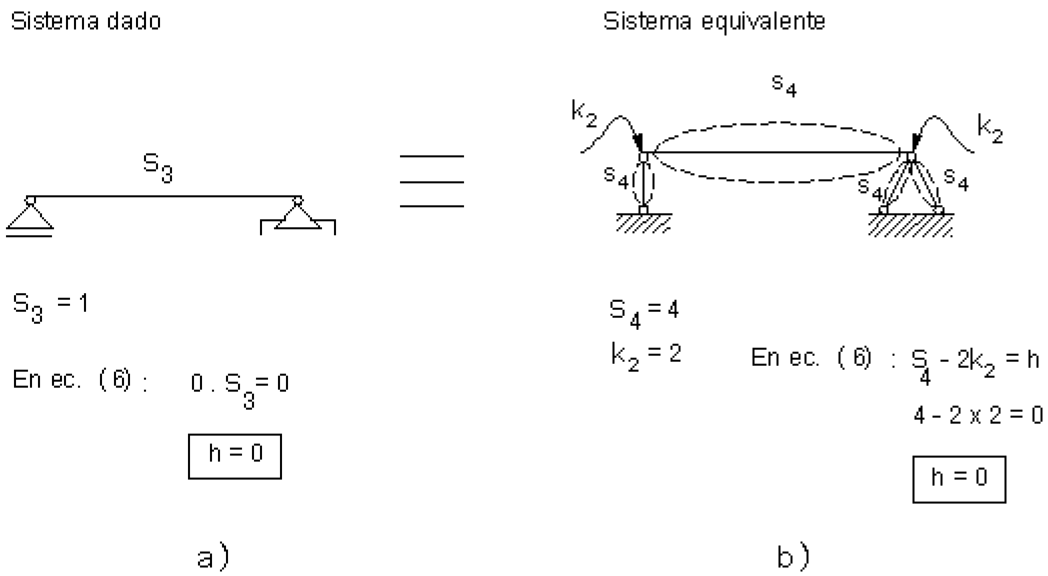


Figura5

En el esquema presentado en la Figura 6[4] se ilustra sobre cómo se separan los sistemas a partir de los nudos articulados. Las articulaciones son comunes a todas las barras concurrentes, por lo que en correspondencia con ellas y para cada una de dichas barras, se manifestarán dos esfuerzos (N,Q) restitutorios del equilibrio del sistema aislado.

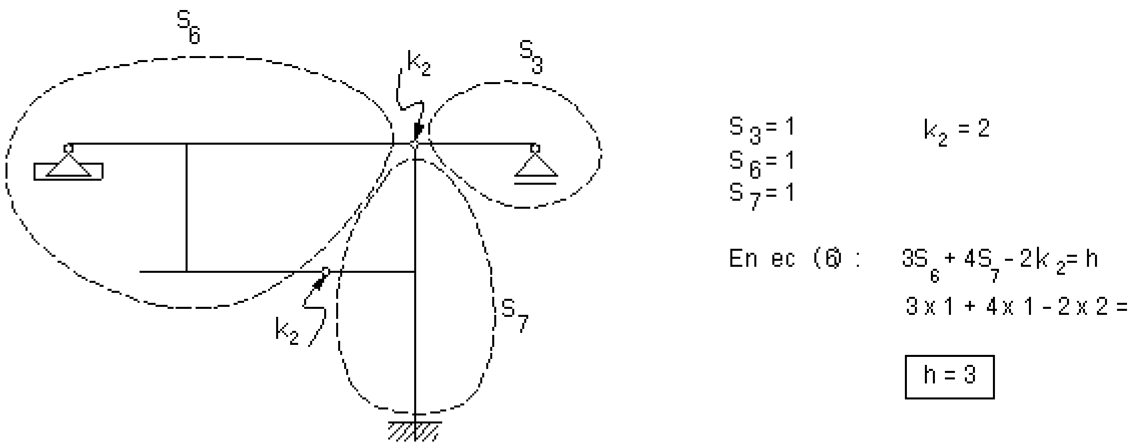


Figura 6

En aquellos casos en los cuales la continuidad de las barras está interrumpida por una articulación, como se tiene en el apoyo A del marco cerrado de la Figura 7.a, la evaluación es más clara a partir del reemplazo del apoyo por bielas (Figura 7.b).

En la Figura 7.c se presenta el sistema desmembrado donde se observa que el extremo articulado A es común a todas las barras concurrentes, como se indicara anteriormente.

En la Figura 7.d se muestra otra alternativa de evaluación que conduce al mismo resultado, dejando liberada la articulación en cuestión a partir de un corrimiento virtual del apoyo A.

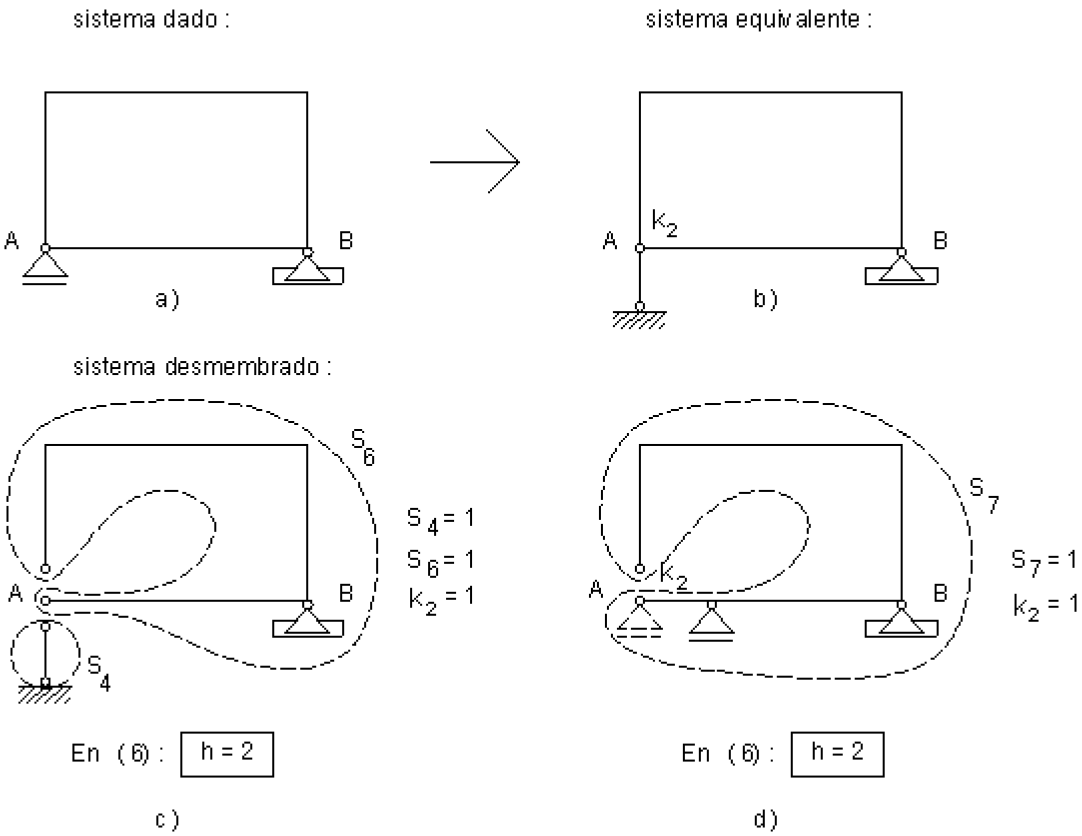
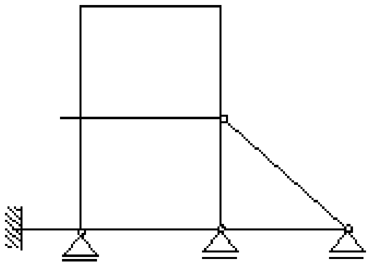


Figura 7

El sistema aporticado dado en la Figura 8.a se resuelve por el método de reemplazo por bielas y por corrimiento virtual del apoyo articulado donde las barras concurrentes pierden su continuidad (Figuras 8.b,c,d). Es necesario que todo marco cerrado se abra a fin de configurar un sistema libre, ramificado de ser el caso. Donde las barras se seccionan se tendrán vínculos tipo K_3, puesto que en ellos se pondrán de manifiesto tres solicitaciones restitutorias del estado de equilibrio (M,Q,N), a uno y a otro lado de la sección.

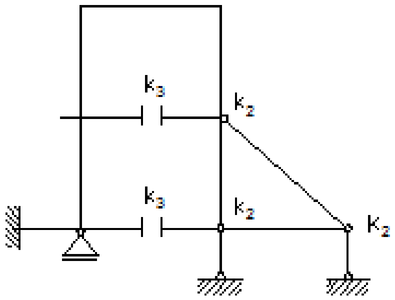
En la Figura 8.d se ilustra acerca de otra manera de seccionar y abrir la estructura, lo cual evidencia que, bajo el resguardo de recaudos mínimos como los que se han venido señalando, queda al arbitrio del evaluador seleccionar sus sistemas libres.

sistema dado[4] :

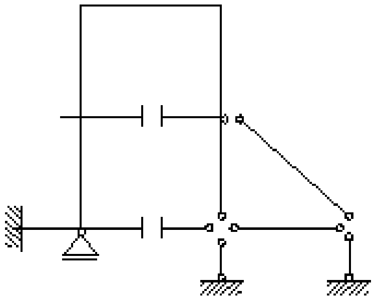


a)

1°) Por el método de las bielas:



b)



c)

$S_{17} = 1$ $\quad k_3 = 2$

$S_5 = 1$ $\quad k_2 = 3$

$S_4 = 4$

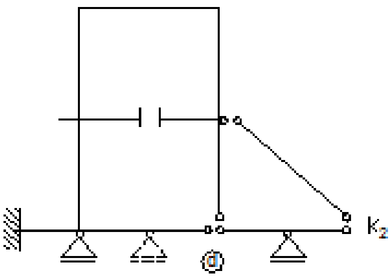
En (6) :

$S_4 + 2S_5 + 14S_{17} - (3k_3 + 2k_2) = h$

$4 + 2 \times 1 + 14 \times 1 - (3 \times 2 + 2 \times 3) = 8$

$\boxed{h = 8}$

2°) Por el metodo de corrimiento de apoyos:



d)

$S_{17} = 1$ $\quad k_3 = 1$

$S_5 = 1$ $\quad k_2 = 3$

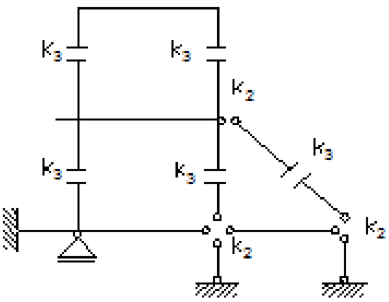
$S_4 = 1$

En (6) :

$S_4 + 2S_5 + 14S_{17} - (3k_3 + 2k_2) = h$

$1 + 2 \times 1 + 14 \times 1 - (3 \times 1 + 2 \times 3) = 8$

$\boxed{h = 8}$



e)

$S_{14} = 1$ $\quad S_5 = 3$ $\quad k_3 = 5$

$S_9 = 1$ $\quad S_4 = 3$ $\quad k_2 = 3$

$S_4 = 1$

En (6) :

$S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 6S_9 + 11S_{14} - 3K_3 - 2K_2 = h$

$3 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 6 \times 1 + 11 \times 1 - (3 \times 5 + 2 \times 3) = 8$

$\boxed{h = 8}$

Figura 8. Pórtico plano

Las estructuras reticuladas son de resolución sencilla, por cuanto todos sus sistemas libres son tipo S_4 (Figura 9). Si se practicase una sección en un sistema tipo S_4, se generarían dos sistemas tipo S_5. En tal caso, la ecuación (6) sería igualmente aplicable.

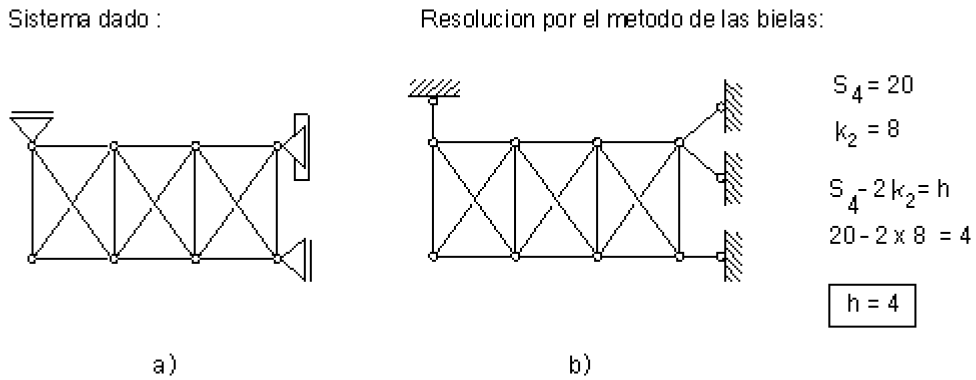


Figura 9. Reticulado plano

Bajo los conceptos señalados, el sistema mixto de la Figura 10.a no ofrece inconvenientes para su evaluación.

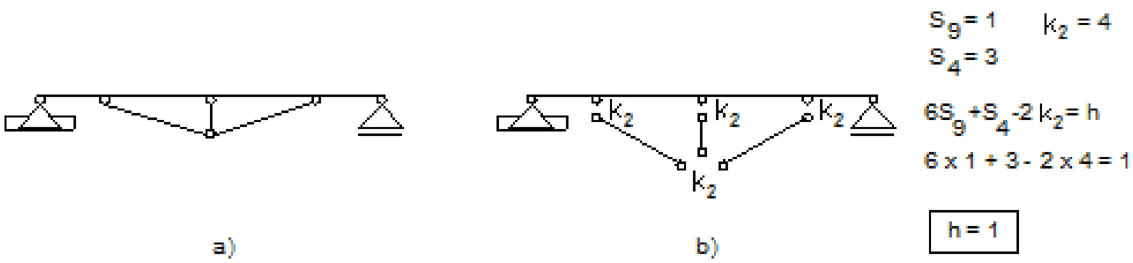


Figura 10. Sistema compuesto

4. Evaluación del grado de indeterminación estática en sistemas espaciales de barras

En el ámbito del sólido rígido, un sistema de dos partículas con distancia mutua invariable posee en el espacio cinco grados de libertad, por cuanto fijando su posición con cinco coordenadas independientes se le quita toda posibilidad de movimiento. De ello se tiene que una barra recta (sistema unidimensional) dispuesta en el espacio posee cinco grados de libertad, en tanto que una chapa (sólido rígido bidimensional) seis grados de libertad.

Estos elementos estructurales se vinculan a tierra a través de apoyos de primera a sexta especie (Fliess, ob cit) . Internamente lo pueden hacer mediante conexiones que restringen de tres a seis grados de libertad (Figura 11). Al igual que lo señalado para sistemas planos, en correspondencia con cada uno de estos enlaces se ponen de manifiesto tantos esfuerzos de restricción como grados de libertad impedidos.

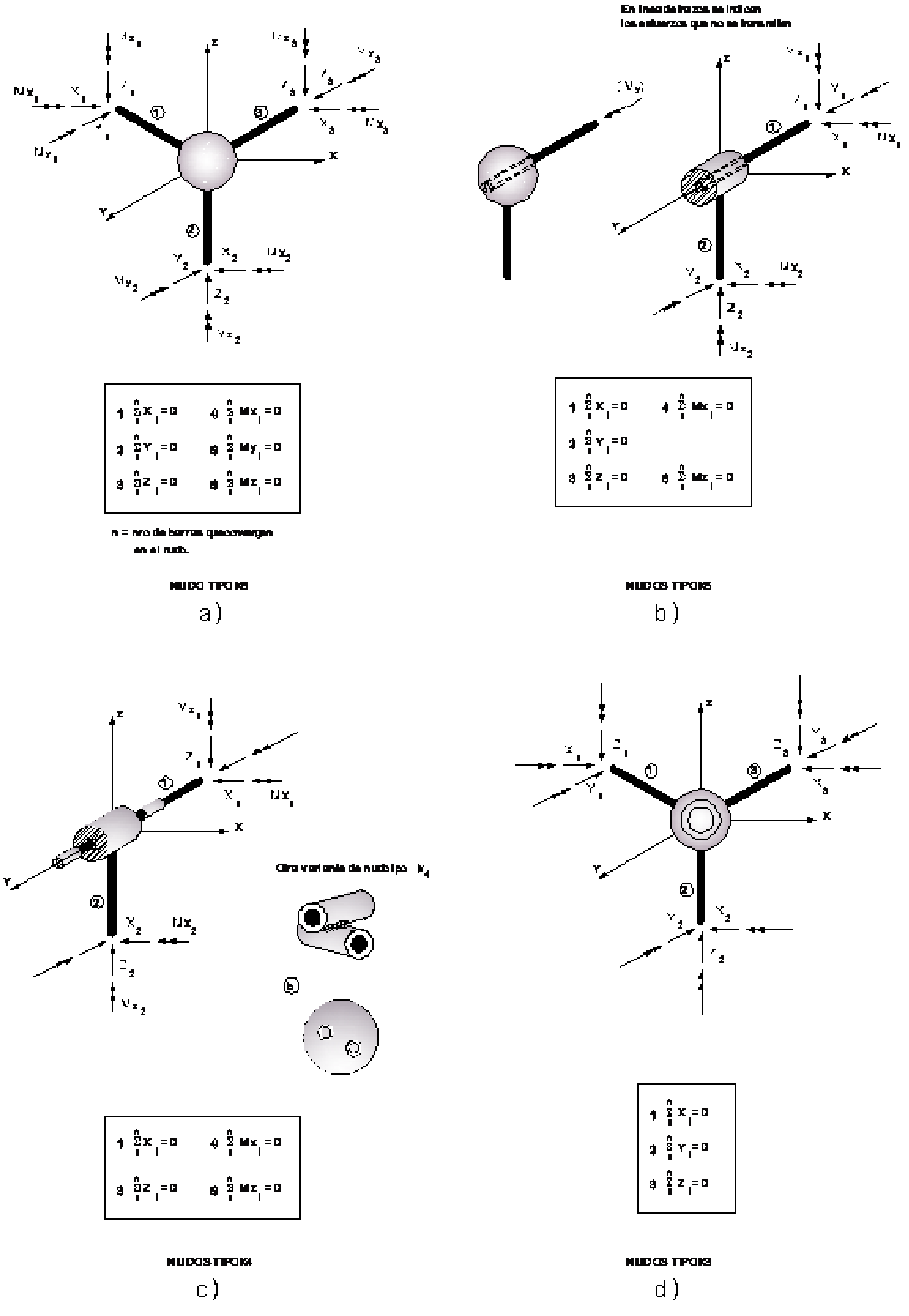


Figura 11. Conexiones internas en sistemas espaciales

4.1. Expresiones usuales

La enumeración formal de los vínculos sobreabundantes para estructuras espaciales con barras rígidamente unidas o articuladas, dada por K. Beyer en la obra citada es

$$h = (S_6 + 3S_9 + 6S_{12} + t) – (3K_3 + 2K_2) \qquad (11)$$

siendo

S_6, S_9, S_{12} = Sistemas libres abiertos (barras, chapas). El subíndice designa el número de esfuerzos que se evidencian en cada nudo para restituir las condiciones de equilibrio estático. En sistemas abiertos con vínculos rígidos en sus extremos corresponde S_{12}; si un extremo está articulado, S_9; para dos extremos articulados, S_6.

K_3, K_6 = Nudos del sistema dado que vinculan las barras o chapas entre sí. El subíndice indica en número de solicitaciones que se evidencian en el nudo de unión para restituir el equilibrio de fuerzas. Luego, para nudos rígidos corresponde K_6; para articulados, K_3.

t = Número de barras no cargadas entre articulaciones, tales como tensores, puntales, soportes auxiliares, bielas.

4.2. Expresión propuesta

La ecuación (11) puede modificarse conforme se expresa en (12). Como en el caso de los sistemas planos, otorga más libertad al evaluador para elegir sus sistemas aislados, además de introducir otros posibles tipos de vínculos internos. Los sistemas rectilíneos biarticulados, tales como los tensores “t”, son tratados como sistemas S'_6.

$$h = [S'_6 + S_7 + 2S_8 + 3S_9 + _{...} + (i – 6) S_i] – (3K_3 + 4K_4 + 5K_5 + 6K_6) \qquad (12)$$

donde los subíndices de las S y K responden a los mismos conceptos que los expresados para (5). La variante radica en la introducción del sumando (i – 6) S_i, cuyo subíndice tendría como único límite el impuesto por el evaluador al escoger las chapas. La aparición de sistemas libres S y nudos K no contemplados en (11) se debe al tipo de conexiones introducidas en las Figuras 11.a, b, c y d.

4.2.1 Fundamento

Los sistemas tipo S'_6, desde el punto de vista cinemático, cuentan en el espacio con 5 grados de libertad, típico de las barras rectas como se indicó en 4. Las articulaciones en los extremos dan lugar a tres solicitaciones potenciales de vínculo cada una, por lo que estos sistemas son hiperestáticos de grado 1. En las Figura 12.a se muestra la barra en esta situación, cuando está tomada por vínculos de tercera especie. En las Figura 12.b y c, en condiciones de sustentación isostática e hipostática, respectivamente, al estar tomada por apoyos de tercera y segunda especie.

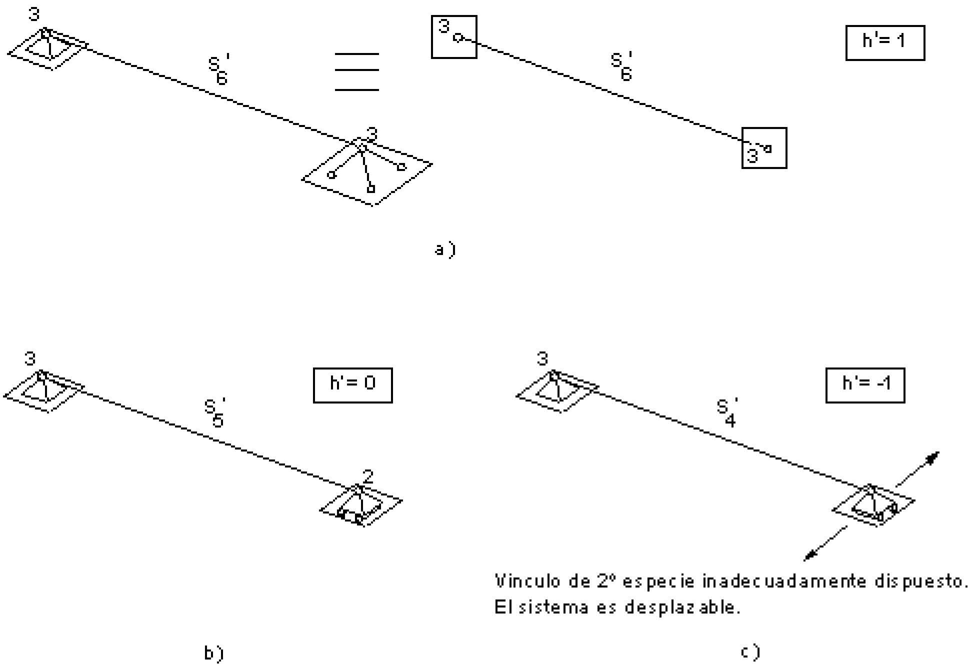


Figura 12. Barra biarticulada bajo distintas condiciones de vínculo

Cuando el sistema biarticulado consiste en una chapa en el espacio se torna desplazable por ser uno de sus vínculos aparentes (Figura 13.a y b). En la Figura 13.c se muestra una alternativa de sujeción que le confiere isostaticidad.

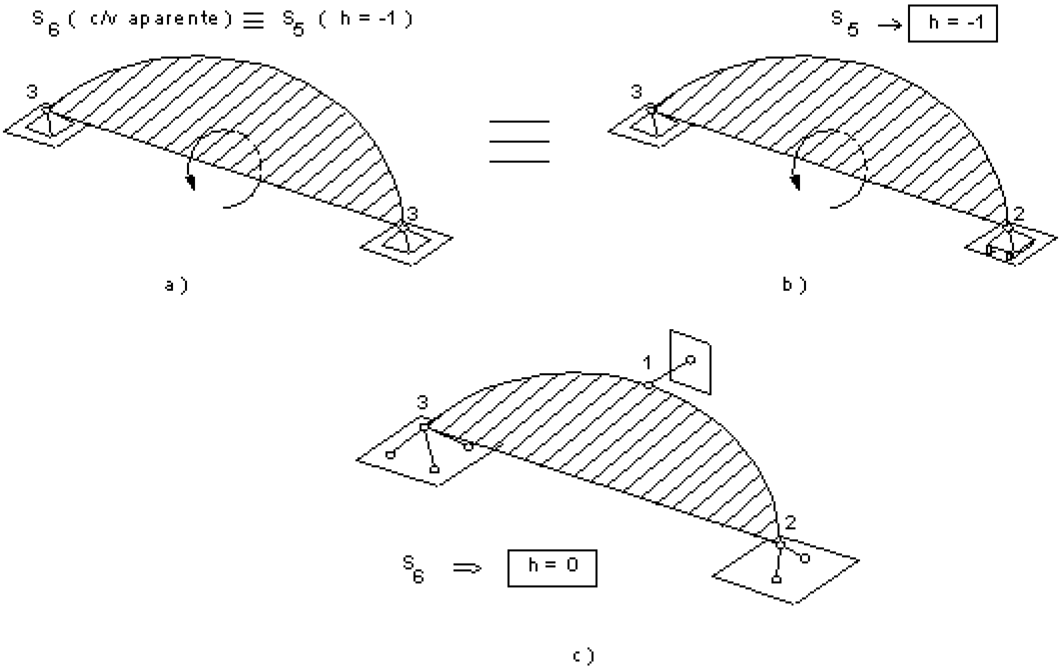


Figura 13 a y b) Chapa biarticulada hipostática en el espacio; c) chapa isostática

El sustento de la (12) no difiere conceptualmente de lo indicado para sistemas planos. El sólido rígido bidimensional (chapa) o tridimensional, necesita al menos seis vínculos absolutos (externos) y/o relativos (internos) para que su estabilidad esté garantizada. El grado de indeterminación estática estará dado por

$$h = i - 6 \tag{13}$$

Contándose con seis ecuaciones de equilibrio provistas por la estática, es posible, por aplicación de (13), ir construyendo la Tabla 3 para cada sistema aislado escogido.

Ante la presencia de sistemas biarticulados tipo S'_6, la indeterminación debe evaluarse según (14)

$$h' = i - 5 \tag{14}$$

Tabla 3. Grado de indeterminación de sistemas aislados Si

Tipo de Sistema S_i (S'_i)	N° de solicitaciones reactivas i	N° de ecuaciones disponibles	Grado de indeterminación del sistema (h= i-6) (h'= i-5)
S'_6	6	5	1
S_6	6	6	0
S_7	7	6	1
S_8	8	6	2
…..	…..	…..	…..
S_i	i	6	(i-6)

Como se indicó en el análisis de sistemas planos, para la selección de los sistemas aislados lo conveniente es desmembrar la estructura en correspondencia con los vínculos internos articulados y abrir los marcos cerrados.

La suma de las indeterminaciones de cada una de las chapas en las que se decompone un sistema dado es

$$h_1 = [S'_6 + S_7 + 2S_8 + 3S_9 + \ldots + (i - 6)\, S_i\,] \tag{15}$$

Al ensamblar la estructura para volverla a su configuración original, la estática provee un grupo de ecuaciones auxiliares que garantizan el equilibrio de los nudos y disminuye el grado de indeterminación. En la Figura 11 se ha ilustrado sobre los tipos de nudos o vínculos internos que se pueden presentar y las correspondientes ecuaciones que tienen lugar.

El número total de ecuaciones auxiliares será

$$n_{aux} = (3K_3 + 4K_4 + 5K_5 + 6K_6) \tag{16}$$

componiendo ambas se obtiene el segundo miembro de la (12). Luego

$$h = h_1 + n_{aux} = [S'_6 + S_7 + 2S_8 + 3S_9 + _{...} + (i-6)\, S_i\,] - (3K_3 + 4K_4 + 5K_5 + 6K_6) \qquad (17)$$

4.2.2 Ejemplos

En la Figura 14.a se tiene una estructura aporticada en el espacio. Para la evaluación se la ha desmembrado en correspondencia con los vínculos articulados (Figura 14.b). Las articulaciones son comunes a cada una de las barras concurrentes, de allí que en la separación cada una conserva este vínculo.

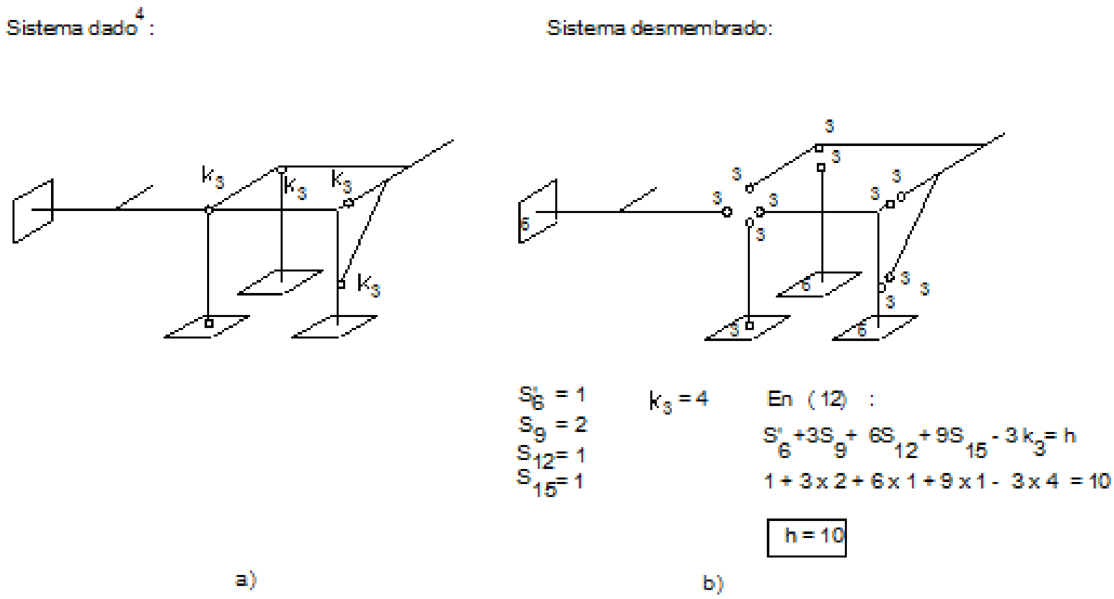


Figura14. Pórtico espacial

La Figura 15 presenta una estructura reticulada espacial Para evaluar al indeterminación conviene sustituir cada apoyo de tercera especie por tres bielas no coplanares. Todos sus miembros son sistemas tipo S'_6.

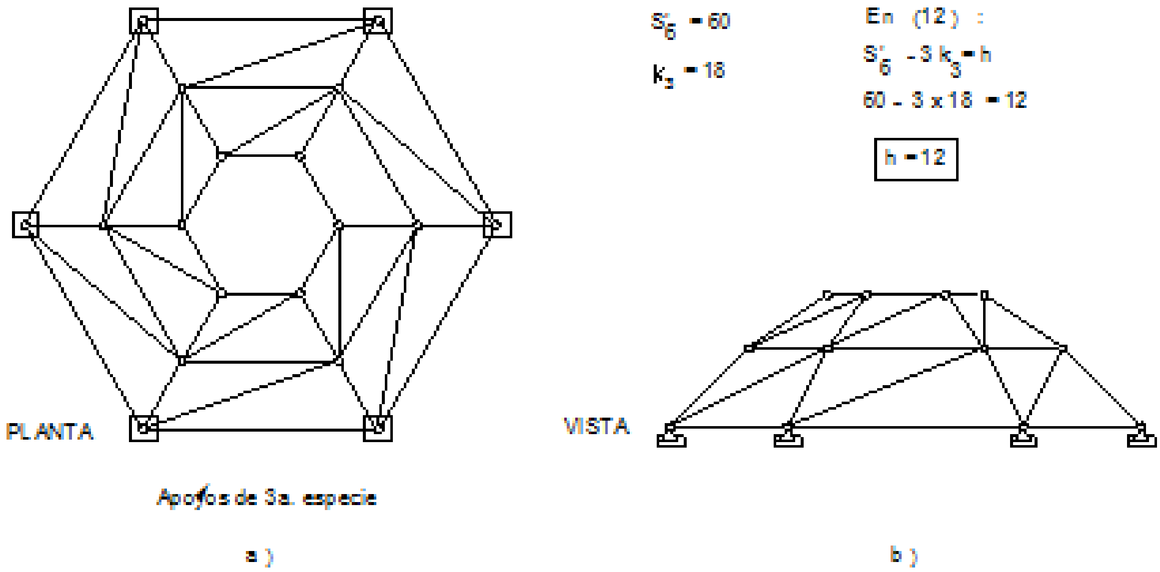


Figura 15. Reticulado espacial

En la figura 16 se tiene un sistema compuesto o mixto, por que el modo de operar es similar al aplicado en los casos anteriores. No obstante ello, nada impide para este caso y los analizados, separar las partes en modo diferente al presentado, en tanto se guarde lo convenido para la designación de vínculos y sistemas.

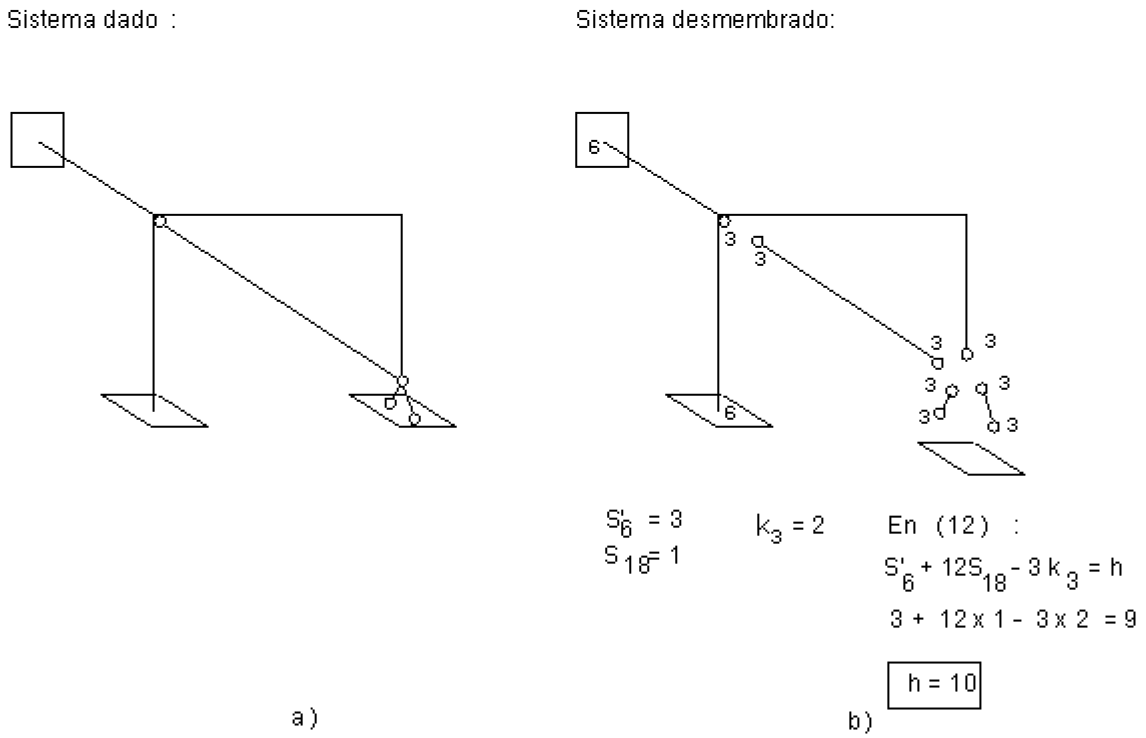


Figura 16. Sistema espacial mixto.

Los emparrillados de vigas, si bien se definen como estructuras espaciales, si no existen componentes de acciones coplanares, deben ser evaluados como sistemas planos con la ecuación (5).

5. Conclusiones

A partir de la introducción de una sencilla modificación a las fórmulas dadas por Kurt Beyer para la evaluación del grado de indeterminación estática de sistemas estructurales planos y espaciales, se han logrado expresiones equivalentes que permiten dar libertad al evaluador en elegir de manera más amplia y desestructurada sus sistemas libres o chapas.

Las fórmulas presentadas unifican el tratamiento de los sistemas de alma llena, de reticulado y mixtos, por cuanto se sustenta en la restricción a los grados de libertad del sólido rígido, lo cual permite independizarse del tipo de solicitaciones que distinguen a estos tipos estructurales.

Referencias

1. Beyer, K.,: *Estática del Hormigón Armado*, Tomo I, Nigar, Buenos Aires, 1957.
2. Begliardo,H.:*Fundamentos y Evaluación del Grado de Indeterminación en Estructuras,* Univ.Nacional de Salta, 1985.
3. Fliess, E.: *Estabilidad I*, Kapeluz, Buenos Aires, 1973.
4. Hirschfeld, K,: *Estática de la Construcción*, Reverté, Barcelona, 1975.