

VÍNCULOS EN ESTÁTICA: ESTRUCTURAS PLANAS Y ESPACIALES. UN ENFOQUE DIDÁCTICO

MSc. Ing. Luis Abraham Lifschitz – Río Cuarto – F.I.– U.N.R.C.

MSc. Ing. Raúl Dean – Río Cuarto – F.I.– U.N.R.C.

MSc. Ing. Livio Sebastián Maglione – Río Cuarto – F.I.– U.N.R.C.

RESUMEN

Es bien conocido que los vínculos son una parte fundamental de los sistemas estructurales. También es sabido que es condición necesaria que el tipo y la cantidad de vínculos sea adecuada. En este sentido el álgebra lineal provee una forma para determinar si la disposición de vínculos (externos e internos, en estructuras conformadas por varios cuerpos rígidos) permite lograr el equilibrio para cualquier sistema de cargas. Cabe mencionar que los alumnos que cursan la asignatura Estática y Resistencia de Materiales en la Facultad de Ingeniería de la U.N.R.C. han aprobado el año anterior el curso de Álgebra.

El análisis del rango de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones de equilibrio resultantes provee una herramienta matemática para determinar si los vínculos están o no apropiadamente dispuestos, tanto en estructuras planas como espaciales, ya sea en estructuras con vínculos cuyo número es el estrictamente necesario o en estructuras con vínculos superabundantes.

También el número de condición permite visualizar cuan conveniente es la disposición de los vínculos, o eventualmente la necesidad de utilizar teoría de segundo orden para la determinación de las reacciones de vínculo. Asimismo la adecuada disposición de vínculos permite lograr realizaciones con un conveniente equilibrio estructural y estético.

ABSTRACT

It is well known that supports are a fundamental part of structural systems. Also the fact that necessary condition is the type and the quantity of supports is known be adequate. In this sense the linear algebra supplies a way to determine if the disposition of supports (external and internal, in structures conformed by several rigid bodies) permits achieving the equilibrium for any system of loads. Mentioning is possible that the students that take a course of Static and Resistance of Materials subject in the Faculty of Engineering of the U.N.R.C. have approved the prior year the course of algebra.

The analysis of the rank of the matrix of coefficients of the equilibrium system equations supplies a mathematical tool to determine if supports are or not appropriately arranged, so much in plane structures like in spatial structures, either in structures with supports whose number is the strictly necessary or in structures with superabundant supports.

Also the Condition Number permits visualizing how convenient the disposition becomes of supports, or eventually the need to utilize second order theory for the determination of the reactions of supports. In this manner the adequate disposition of supports permits achieving realizations with a convenient structural and esthetic equilibrium.

INTRODUCCIÓN

Es sabido que un cuerpo rígido -elemento estructural- en el plano posee tres grados de libertad en tanto que en el espacio posee seis grados de libertad. Un conjunto de elementos interconectados posee, en general, un mayor número de grados de libertad. Para fijar el elemento estructural, o estructura, a otro u otros elementos, se colocan vínculos (o apoyos) que restringen total o parcialmente los grados de libertad que el conjunto tiene en ausencia de vínculos. Asimismo es sabido que el número de vínculos, acorde al tipo de los mismos, es condición necesaria pero no suficiente para restringir totalmente los movimientos del elemento estructural o conjunto de elementos estructurales interconectados, es decir no sólo se debe contar con el número suficiente de vínculos sino que los mismos deben estar adecuadamente dispuestos.

En algunas estructuras planas simples la mera inspección ocular puede permitir inferir si los vínculos están o no convenientemente dispuestos. Pero en estructuras más complejas y sobre todo en estructuras espaciales, es conveniente disponer de una metodología más sistemática y confiable para determinar si los vínculos (externos e internos) están o no correctamente dispuestos. También resulta de utilidad poder disponer de una herramienta que nos permita determinar la precisión de los resultados en los valores de las incógnitas, y si eventualmente se requiere la aplicación de teorías de segundo orden.

METODOLOGÍA

El rango de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones de equilibrio resultantes (donde el vector de incógnitas contiene las componentes de las reacciones en los apoyos) nos permite inferir si los vínculos, ya sea en estructuras compuestas por un solo elemento estructural o por varios elementos estructurales interconectados, están o no adecuadamente dispuestos ¹. Es decir si la matriz mencionada es de rango máximo, lo que implica en el caso particular de matrices cuadradas (igual número de ecuaciones que de incógnitas) que la matriz es no singular, se puede afirmar que los vínculos están convenientemente dispuestos, o sea el sistema de ecuaciones es compatible en todos los casos. Entonces es posible lograr el equilibrio para cualquier sistema de cargas (cualquier lado derecho, en el planteo matricial del sistema de ecuaciones, está en el espacio columna de la matriz de coeficientes).

En el sistema matricial $[A]\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para la determinación de la precisión en los valores resultantes de las incógnitas, es útil la introducción del número de condición ^{2,3,4} de la matriz de coeficientes, donde el número de condición se define como:

$$c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \quad \text{con} \quad \|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (1)$$

Siendo $\|A\|$ y $\|A^{-1}\|$ la norma de la matriz y de su inversa, respectivamente.

Se analizarán tres casos de estudio.

Caso 1 ⁵

La barra acodada, según Figura 1, está sostenida mediante el perno fijo A y el perno B que encaja en la ranura pulida.

A) Si $d = 750$ mm, ¿ Cuáles serán las reacciones para la carga mostrada ?.

B) Indicar para que valor de “d” el sistema de ecuaciones -cuyas incógnitas son las reacciones- resulta inconsistente, para una carga arbitraria. ¿Cuál es la significación física y algebraica del tal hecho ?.

Figura 1

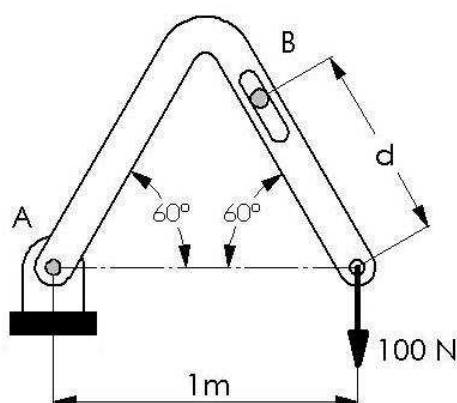
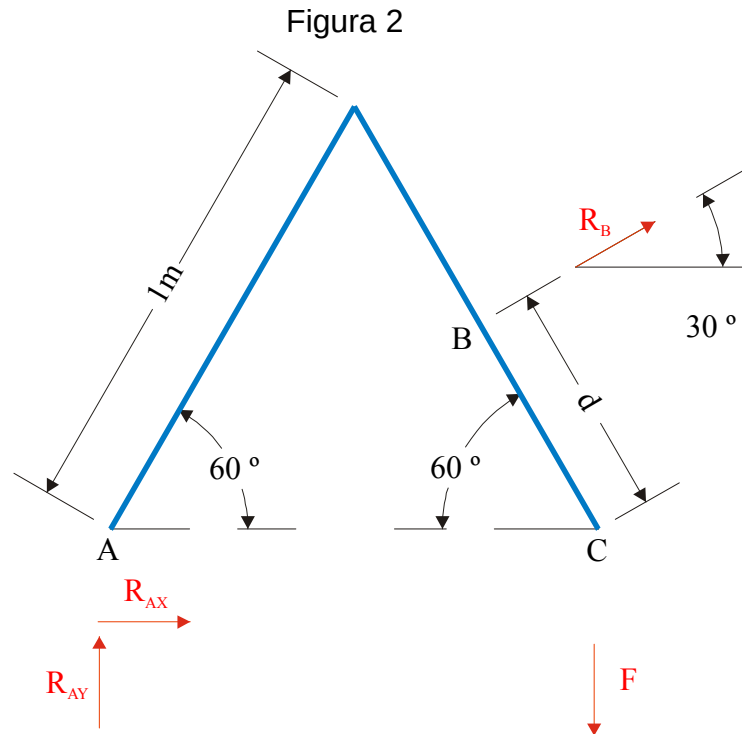


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



RESOLUCIÓN INCISO A

Escribiendo el sistema de ecuaciones de equilibrio en forma matricial desarrollada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos 30^\circ \\ 0 & 1 & \sin 30^\circ \\ 0 & -1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para $d = 0.75$ [m] y $F = 100$ [N], los valores de las incógnitas resultan:

$$R_{Ax} = 346.41 \text{ [N]}$$

$$R_{Ay} = 300.00 \text{ [N]}$$

$$R_B = -400.00 \text{ [N]}$$

Cabe observar que:

a) La matriz de coeficientes, del sistema de ecuaciones de equilibrio resultantes, no depende de las cargas, ni tampoco del material ni características

geométricas de las secciones de los elementos estructurales, sino sólo de la topología de la estructura.

b) El rango de la matriz A es igual a tres, es decir la matriz A es no singular, por lo cual se infiere que los vínculos están adecuadamente dispuestos y se puede lograr el equilibrio para cualquier sistema de cargas, entre ellos el analizado anteriormente. Equivalentemente podemos decir que, para cualquier lado derecho, el rango de la matriz A y el rango de la matriz ampliada $[A,b]$ son iguales, entonces el sistema tiene solución (para cualquier estado de cargas). Asimismo como el número de incógnitas es igual al rango de la matriz A, y de la matriz ampliada, la solución es única, que para el caso analizado da por resultado los valores consignados precedentemente.

c) El número de condición de la matriz A resulta, para el caso de referencia, igual a 14.86 (obtenido mediante software MatLab)

RESOLUCIÓN INCISO B

En el problema abordado, cuando $d = 0.50$ [m], la matriz A resulta singular por lo cual el rango de A será menor que tres, concluyéndose que en dicho caso los vínculos no están adecuadamente dispuestos y el sistema es compatible sólo para algunos lados derechos b, es decir se puede lograr el equilibrio sólo para ciertos sistemas de cargas (los que hagan que el rango de la matriz A y de la matriz ampliada sean iguales).

Además para los sistemas de cargas para los cuales se puede lograr el equilibrio, teniendo presente que el número de incógnitas es de tres, mayor que el rango de la matriz A, el sistema es compatible pero indeterminado.

Cabe observar también que a medida que d tiende a 0.50 [m] el número de condición de la matriz A (matriz mal condicionada) se incrementa notablemente, tendiendo a infinito.

Caso 2

En una estructura con vínculos superabundantes también puede ser aplicado el criterio anteriormente considerado. A tal efecto se consigna a continuación una de las preguntas de una evaluación parcial de la asignatura Estática y Resistencia de Materiales (FI – UNRC):

- Una viga rígida en el plano (un sólido rígido) tiene 4 apoyos móviles . Si la matriz de coeficientes (del sistema de ecuaciones de equilibrio resultantes) tiene rango 3, ello implica que:

a) Los vínculos no están bien dispuestos y se puede lograr el equilibrio sólo para algunos sistemas particulares de cargas.

- b) Los vínculos están bien dispuestos y se puede lograr el equilibrio para cualquier sistema de cargas.
- c) No podemos efectuar las afirmaciones anteriores sin conocer la disposición de los vínculos.
- d) El rango de la matriz ampliada será igual a 3 sólo para ciertos casos de carga.
- e) El rango de la matriz ampliada será igual a 3 para todos los casos de carga.
- f) El rango de la matriz ampliada será menor que 3 sólo para ciertos casos de carga.
- g) El rango de la matriz ampliada será menor que 3 para todos los casos de carga.
- h) El rango de la matriz ampliada será mayor que 3 sólo para ciertos casos de carga.
- i) El rango de la matriz ampliada será mayor que 3 para todos los casos de carga.
- j) El vector de términos independientes estará en todos los casos (para cualquier sistema de cargas) en el espacio columna de la matriz de coeficientes.
- k) El vector de términos independientes estará sólo para ciertos casos de carga en el espacio columna de la matriz de coeficientes.

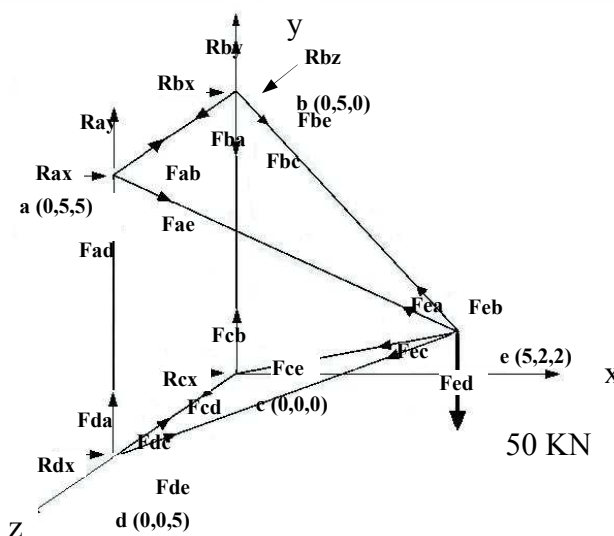
(Indicar la(s) respuesta(s) correcta(s))

Donde, lógicamente, las respuestas correctas son: b), e) y j).

Caso 3 ⁵

El criterio expuesto precedentemente puede ser también aplicado a reticulados planos o espaciales, con las hipótesis usuales de nudos articulados y cargas aplicadas en los nudos, para determinar si los vínculos externos y/o barras del reticulado están adecuadamente dispuestos ^{6,7}. Ver, como ejemplo, Figura 3.

Figura 3



Escribiendo el sistema de ecuaciones de equilibrio en forma matricial desarrollada:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0.762 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.457 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & -0.457 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.812 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -0.487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0.325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.871 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.348 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.348 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.812 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.762 & 0 & 0 & -0.812 & -0.811 & 0 & -0.812 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.457 & 0 & 0 & 0.487 & -0.348 & 0 & -0.325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.457 & 0 & 0 & -0.325 & -0.348 & 0 & 0.487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_{ab} \\
 F_{ae} \\
 F_{ad} \\
 F_{bc} \\
 F_{be} \\
 F_{ce} \\
 F_{cd} \\
 F_{de} \\
 R_{ax} \\
 R_{ay} \\
 R_{bx} \\
 R_{by} \\
 R_{bz} \\
 R_{cx} \\
 R_{dx}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 50 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (3)$$

En el vector de incógnitas figuran los esfuerzos en extremos de barras y las componentes de reacción de los apoyos.

Cabe observar, nuevamente, que en la matriz de coeficientes no figuran las cargas, ni características del material ni propiedades geométricas de las secciones de las barras, sino sólo los cosenos directores de las incógnitas.

El rango de la matriz de coeficientes es de 15, por lo cual se concluye que los apoyos y/o barras están adecuadamente dispuestos y se puede lograr el equilibrio para cualquier sistema de cargas.

CONCLUSIONES

La vinculación de conceptos de Álgebra Lineal y de Estática permite una integración, evitando dicotomías, entre ambas asignaturas, así como con otras que los estudiantes ya han cursado, permitiendo una integración de contenidos, y a su vez una preparación para otras asignaturas del área estructural, tales como Análisis Estructural y Estabilidad Aplicada, que los alumnos estudiarán posteriormente en el Plan de Estudios.

Lo expresado en el párrafo precedente tiende al logro, por parte de los alumnos, de uno de los objetivos específicos de la asignatura, consistente en analizar, a través del sistema de ecuaciones, la consistencia del problema y su significación física y algebraica, y su aplicación a problemas de interés en ingeniería.

Lo consignado propende a un aprendizaje significativo ⁸.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece especialmente al Ing. Mauricio Ghirardotto por la realización de los dibujos y ecuaciones que figuran en este trabajo. También a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Río Cuarto (U.N.R.C.) por el apoyo brindado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ¹ Kerguignas, M., Caignaert, G. “Resistencia de Materiales”. Ed. Reverté.
- ² Hill, R. “Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones”. Ed. Prentice Hall.
- ³ Strang, G. “Álgebra Lineal y sus Aplicaciones”. Ed. Fondo Educativo Interamericano.
- ⁴ Noble, B., Daniel, J. “Álgebra Lineal Aplicada”. Ed. Prentice Hall.
- ⁵ Guía de Trabajos Prácticos de Estática y Resistencia de Materiales – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Río Cuarto
- ⁶ West, H. “Análisis de Estructuras”. Ed. C.E.C.S.A.
- ⁷ Tuma, J. “Análisis Estructural”. Ed. McGraw – Hill.
- ⁸ Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. “Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo”. Ed. Trillas.